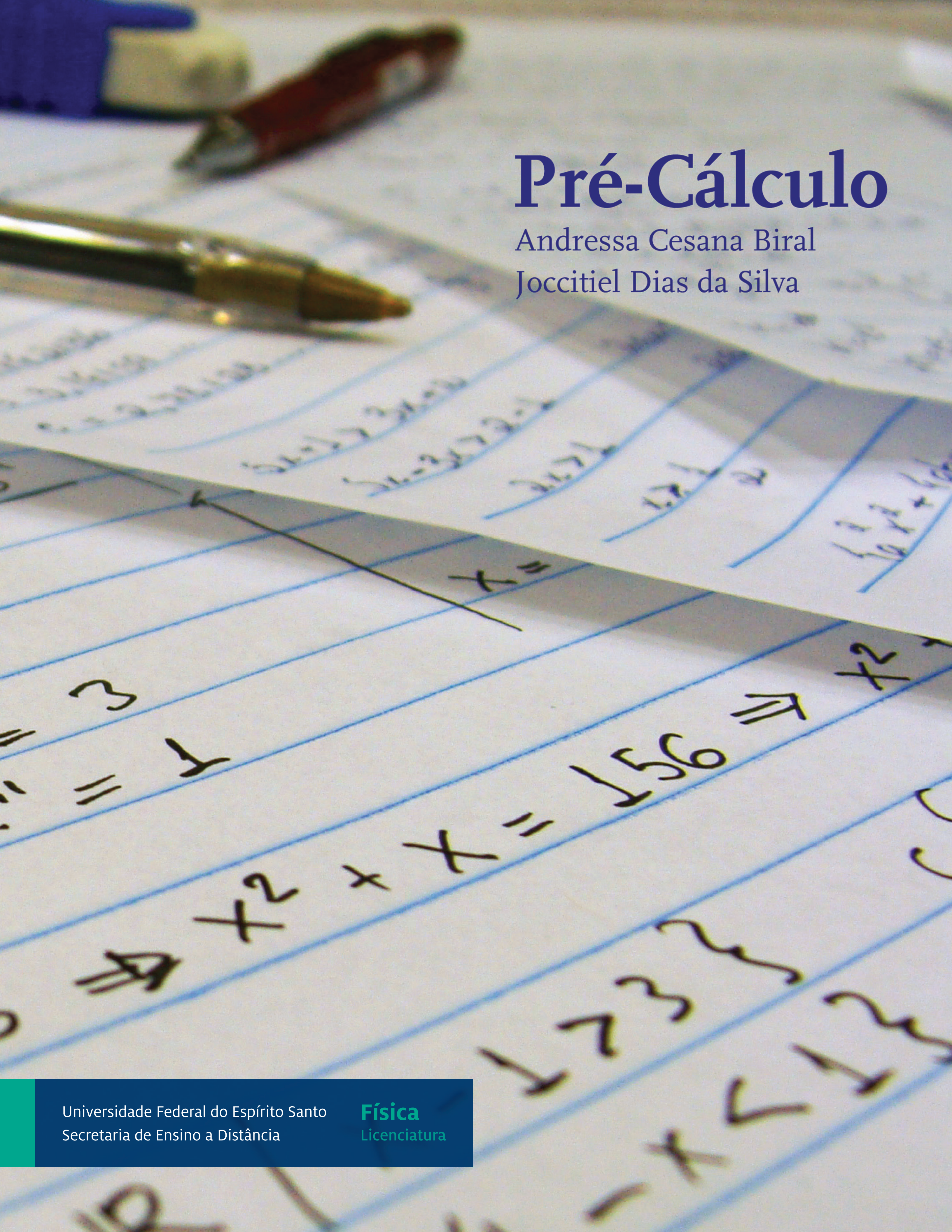


Pré-Cálculo

Andressa Cesana Biral
Joccitiel Dias da Silva

Universidade Federal do Espírito Santo
Secretaria de Ensino a Distância

Física
Licenciatura

O Pré-Cálculo como disciplina tem o objetivo de preparar o aluno do curso de Licenciatura em Fìsica para outras disciplinas.

Tendo em vista que a Matemática é ferramenta imprescindível no processo de ensino -aprendizagem, a proposta do Pré-Cálculo é apresentar ao cursista uma revisão dos conteúdos importantes da Matemática do Ensino Médio a fim de compreender melhor tanto os outros Cálculos Diferenciais e Integrais quanto às próprias disciplinas da Física.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria de Ensino a Distância

PRÉ-CÁLCULO

Andressa Cesana Biral
Joccitiel Dias da Silva

Vitória
2015

SEAD
Av. Fernando Ferrari, nº 514
CEP 29075-910, Goiabeiras
Vitória – ES
(27) 4009-2208

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Biral, Andressa Cesana.
B617p Pré-cálculo / Andressa Cesana Biral, Joccitiel Dias da Silva. - Vitória : Universidade Federal do Espírito Santo, Secretaria de Ensino a Distância, 2009.
110 p. : il. ; 28 cm

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-89858-42-7
Reimpressão, 2015.

1. Cálculo. 2. Física. I. Silva, Joccitiel Dias da. II. Título.

CDU: 517

Sumário

Apresentação 7

Capítulo 1 – Conjuntos Numéricos 9

1.1 Introdução 9

1. 2 O Conjunto dos números naturais 15

1. 3 O Conjunto dos números inteiros 17

1. 4 O Conjunto dos números racionais 18

1. 5 O Conjunto dos números reais 21

1. 6 Resolução de equações do 1º grau em R 22

1. 7 Resolução de inequações do 1º grau em R 23

1. 8 Resolução de equações do 2º grau em R 24

Atividades Propostas 26

Referências 29

Capítulo 2 – Problemas de equações do 1º e 2º graus 31

2.1 Introdução 31

2. 2 Resolução de problemas do 1º e 2º graus 32

Atividades propostas 35

Referências 38

Capítulo 3 – Intervalos 41

3.1 Introdução 41

3.2 O que são intervalos de números reais? 42

Atividades propostas 43

Referências 43

Capítulo 4 - O conceito de função....45

4.1 Introdução....45

4.2 Noção intuitiva de função....47

4.3 O conceito matemático de função....48

4.4 Representação gráfica....50

4.5 Domínio, contradomínio e imagem....52

Atividades propostas....54

Referências....55

Capítulo 5 - Funções lineares (ou polinomiais do 1º grau)....57

5.1 Introdução....57

5.2 O conceito de função linear ou polinomial do 1º grau....59

5.3 Aplicações das funções lineares na física....61

Atividades propostas....64

Referências....65

Capítulo 6 - Funções quadráticas (ou polinominais do 2º grau)....67

6.1 Introdução....67

6.2 O conceito de função quadrática ou polinomial do 2º grau....69

6.3 Aplicações das funções quadráticas na física....74

Atividades propostas....77

Referências....77

Capítulo 7 - Outros tipos de funções....79

7.1 Introdução....79

7.2 Função polinominal....80

7.3 Função racional....81

7.4 Funções exponencial e logarítmica....83

7.5 Atividades propostas....93

7.6 Referências....95

Capítulo 8 - Definições importantes acerca de funções.................. 97

8.1 Introdução...97

8.2 Funções compostas..98

8.3 Função par e função ímpar......................................100

8.4 Função crescente e função decrescente..........................102

8.5 Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras....................103

8.6 Função inversa...104

8.7 Atividades propostas...107

8.8 Referências..109

Apresentação

Olá!

Prezadoz(a) aluno(a), foi com imenso carinho que preparamos esta disciplina para você. O Pré-Cálculo é importantíssimo no seu curso porque faz uma retomada de muitos assuntos que já estudou, mas que talvez tenha deixado um pouquinho de lado! Além disso, apresenta também conteúdos mais específicos que provavelmente você ainda não tenha estudado.

Sabe aqueles conteúdos básicos, essenciais para enveredarmos num mundo novo da Matemática? Pois é, são eles!

Por isso, tente "curtir" ao máximo os conteúdos, notas históricas e atividades propostas aqui e desejamos a você uma ótima viagem ao túnel do tempo da Matemática!

► *Como será a estrutura desse texto?*

Acreditamos que a história da Matemática deve ser parte inerente ao estudo de qualquer conteúdo matemático, por isso, tentaremos sempre que possível apresentar notas históricas juntamente com o conteúdo a ser apreendido. Serão propostas também atividades/problemas que você deverá sempre tentar resolvê-las.

Pode-se dizer que a resolução de problemas é uma área de estudos atualmente da Educação Matemática que se preocupa em demonstrar a importância fundamental de como os problemas práticos, do cotidiano, que sejam significativos para o aluno são imprescindíveis no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Dessa forma, esperamos que você sinta-se motivado a resolver problemas!

É preciso lembrar também que este é um curso "virtual", por isso, seu papel deve ser de um aluno ativo, participante, pesquisador, e, principalmente, persistente. Além disso, você terá como orientador, seu tutor. Poderá e deverá sempre contar com ele para tirar suas maiores dúvidas, discutir resoluções de problemas e pedir orientações.

Nesta viagem, que estás prestes a fazer, você contará com a nossa orientação (seremos o seu guia)! Entretanto, também nos baseamos em livros-textos já existentes de modo que você não deve se limitar apenas ao que propomos aqui, certo? Esses textos estarão todos citados no final de cada capítulo para que, sempre que possível você possa buscá-los como fonte de estudos.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1 Introdução

2 O Conjunto dos números naturais

3 O Conjunto dos números inteiros

4 O Conjunto dos números racionais

5 O Conjunto dos números reais

6 Resolução de equações do 1º grau em R

7 Resolução de inequações do 1º grau em R

8 Resolução de equações do 2º grau em R

Conjuntos Numéricos

1.1 Introdução

Nesta primeira parte de nosso estudo vamos rever os conjuntos numéricos importantes os quais darão base para as futuras disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Assim, tudo o que você tiver oportunidade de estudar aqui será pré-requisito para os próximos Cálculos!

O objetivo deste primeiro capítulo é propiciar a você estudante condições de:

- Compreender os conceitos importantes sobre a teoria dos conjuntos e como tais conceitos estão relacionados com a resolução de alguns tipos de problemas;
- Recordar os conjuntos numéricos: números naturais, inteiros, racionais e reais e suas propriedades.

Caro(a) aluno(a), você não pode deixar de participar das atividades práticas que serão oferecidas na plataforma virtual a fim de esclarecer dúvidas e propiciar momentos de trocas de aprendizagens com os outros colegas que também fazem este curso. Para este capítulo, pretende-se abrir fóruns de debates para discutir as resoluções das atividades propostas no livro que foram mais complexas ou geraram mais dúvidas. Participe! Não perca!

Inicialmente, vamos pensar sobre os NÚMEROS! O que os NÚMEROS representam para você? Reflita um pouco!

É interessante mencionar isso porque os números estão à nossa volta, o tempo todo e em todos os lugares. Mas, imagine um número sozinho, solto por aí! Quando é que ele tem sentido?

Normalmente, só concebemos a idéia de número quando ele vem acompanhado de um significado específico: um ciclista está com velocidade constante de 36km/h, um vagão ferroviário desloca-se com velocidade de 30m/s, o salário mínimo é de R$415,00, a taxa de juros da poupança é 6% ao ano, a massa de um determinado objeto é de 595 quilos e tantos outros exemplos que podemos dar.

Quando pensamos nos conjuntos numéricos é interessante mostrá-los numa certa ordem de apresentação: por exemplo, primeiro os números naturais, depois os números inteiros e assim sucessivamente.

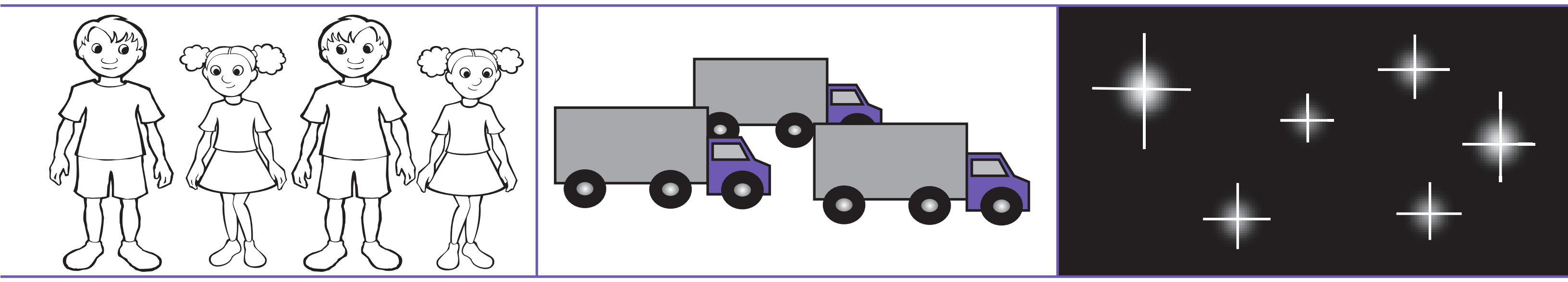
A idéia de conjunto, básica em Matemática, será aqui considerada no seu sentido usual, da linguagem de todos os dias. É uma **idéia primitiva**, isto é, **não pode ser definida**. Podemos dizer que um conjunto (coleção, classe, família) contém elementos.

Primeiro, faremos uma abordagem sobre a Teoria dos Conjuntos, antes de apresentarmos os conjuntos numéricos.

► *Quando é que um conjunto está bem definido?*

Quando é possível estabelecer com certeza se um elemento pertence ou não pertence ao conjunto. Aparece aí uma relação dita **primitiva**: relação de pertinência entre um elemento e um conjunto.

São exemplos de conjuntos: os alunos moradores de Vitória que estudam o curso de Licenciatura em Física; os torcedores de algum time de futebol; os números pares entre 2 e 10, inclusive; os números inteiros entre 1 e 5, exclusive; os pontos de uma reta, etc.



Para uma representação mais objetiva e sintética, é comum, na Matemática, designarmos os conjuntos por letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, X,..., e os elementos, por letras minúsculas: a, b, c, x,...

Há várias maneiras de exprimirmos os conjuntos, três delas: **por palavras**, **pelo "método da enumeração" e pela designação de uma propriedade satisfeita por todos os elementos do conjunto**. Vejamos um exemplo de conjunto expresso por essas três maneiras:

1: Por palavras
Seja A o conjunto de todos os números ímpares entre 2 e 9, exclusive 9.

2: Pelo método da enumeração
$A = \{3, 5, 7\}$

3: Pela designação de uma propriedade característica (que quer dizer, satisfeita por todos os elementos do conjunto)
$A = \{x \text{ é ímpar tal que } 2 < x < 9\}$
Ou
$A = \{x \in I \,/\, 2 < x < 9\}$ onde I representa o conjunto de todos os números ímpares.

► *Uma observação importante:*

A partir desse exemplo, a afirmação *"a pertence ao conjunto A"* significa que *a* é um número ímpar entre 2 e 9, não podendo ser o 2 nem o 9. De fato, respectivamente, 2 não é ímpar e, a definição do conjunto A exclui o 9. Assim, escrevemos simbolicamente, $a \in A$, usando o símbolo de pertinência $\in$. Por outro lado, se dissermos, "2 não pertence a A", representamos por "$2 \notin A$".

Atividade Resolvida

I Apresente, se possível, cada um dos conjuntos abaixo pelo método da enumeração ou pela designação de uma propriedade característica:

a) M é o conjunto dos múltiplos do metro;
M = {decâmetro, hectômetro, quilômetro}

b) R é o conjunto formado pelos ramos da Física;
R = {mecânica, termologia, acústica, óptica, eletrologia, física moderna}

c) T é o conjunto dos tempos possíveis entre 0 e 20 segundos para que um ponto material em movimento retilíneo se mova em relação a um certo referencial;
$T = \{x \in R \,/\, 0s \leq x \leq 20s\}$

d) A é o conjunto das alturas possíveis que um corpo pode atingir, sabendo-se que ele foi abandonado do alto de uma torre de 125 metros de altura em relação ao solo.
$A = \{x \in R \,/\, 0m \leq x \leq 125m\}$

Definições e observações

Diz-se que o conjunto A está contido no conjunto B, ou que A é subconjunto de B, se, e somente se, todo elemento de A também pertence a B. Indica-se $A \subset B$.
Se $A \subset B$, diz-se também que B contém A ($B \supset A$).
O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
O símbolo $\in$ é usado para relacionar elemento e conjunto, enquanto que o símbolo $\subset$ relaciona dois conjuntos.
O conjunto que contém todos os elementos com os quais estamos trabalhando é dito Conjunto Universo – denotado por U. Por exemplo, na Geometria Plana, U pode ser considerado como o conjunto de todos os pontos do plano.
Diz-se que os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A.

Atividades Propostas

1| Escreva em notação simbólica:

a) a é elemento de A

b) A é subconjunto de B

c) A contém B

d) A não está contido em B

e) A não contém B

f) a não é elemento de A

2| Enumere os elementos de cada um dos conjuntos:

a) conjunto dos números naturais entre 8 e 12, inclusive

b) conjunto das vogais do alfabeto

c) conjunto dos números pares entre 0 e 18, exclusive

d) conjunto dos números primos pares positivos

3| Se A = { a, e, i }, diga se as proposições abaixo são corretas ou não:

a) $a \in A$
b) $a \subset A$
c) $\{a\} \in A$
d) $\{a\} \subset A$

4| Dados os conjuntos A = {x / x é par positivo e menor do que 7} e B = {2, 4, 6}, assinale V ou F:

a) $A \subset B$
b) $B \subset A$
c) $A = B$

5| Diga se as proposições abaixo são corretas ou não:

a) $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 3, 2, 1 \}$
b) $\{ 1, 2, 1, 2 \} \subset \{1, 2, 3 \}$
c) $\{4\} \in \{ \{4\} \}$
d) $\varnothing \subset (1, 2, 3 \}$

Atividades Resolvidas

Algumas aplicações da teoria dos conjuntos: Estudo do número de elementos de um conjunto

A seguir, utilizaremos a teoria dos conjuntos na solução de alguns problemas:

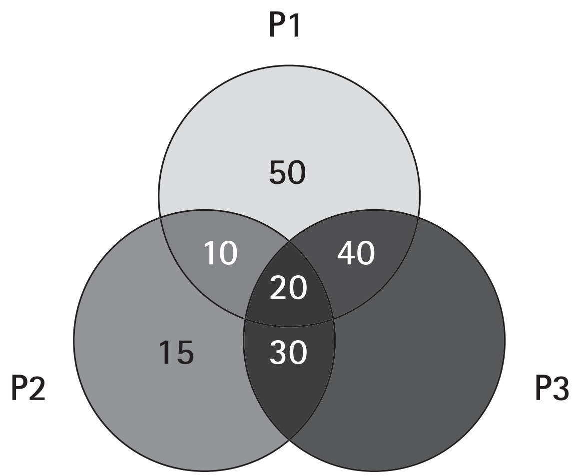
II Uma pesquisa de mercado sobre a preferência de 200 consumidores por três produtos P1, P2 e P3 mostrou que, dos entrevistados, 20 consumiam os três produtos; 30 os produtos P1 e P2; 50 os produtos P2 e P3; 60 os produtos P1 e P3; 120 o produto P1 e 75 o produto P2. Se todas as pessoas entrevistadas deram preferência a pelo menos um dos produtos, pergunta-se:

a) Quantas consumiam somente o produto P3?

b) Quantas consumiam pelo menos dois dos produtos?

c) Quantas consumiam os produtos P1 e P2, e não P3?

Para responder às questões anteriores, podemos pensar no seguinte diagrama:



Considerando-se que todos os entrevistados consumiam pelo menos um dos produtos e, observando o diagrama acima, temos:

a) 200 – (50+10+20+40+15+30) = 200 – 165 = 35 consumiam somente o produto P3;

b) Para sabermos quantos entrevistados consumiam pelo menos dois dos produtos, basta somarmos as interseções: 10+20+40+30 = 100;

c) Apenas 10 entrevistados consumiam simultaneamente P1 e P2 e não consumiam P3.

III Um levantamento efetuado entre 600 filiados ao INSS mostrou que muitos deles mantinham convênio com duas empresas particulares de assistência médica, A e B, conforme o quadro abaixo.

Convênio com A	Convênio com B	Filiados somente ao INSS
430	160	60

Pergunta-se:
a) Quantos eram filiados às duas empresas A e B?
b) Quantos eram filiados somente à empresa A?

Para respondermos aos itens acima, vale observar que 430 filiados ao INSS mantêm convênio com a empresa A (incluindo também os filiados que têm convênio simultaneamente com as empresas A e B). De modo análogo pode-se pensar para os 160 conveniados com a empresa B.
Assim,

a) Fazendo a conta: (430+160+60) – 600 obtemos que 50 eram filiados ao mesmo tempo as duas empresas A e B;

b) Somente à empresa A eram filiados 430 – 50 = 380.

Agora, conforme a idéia apresentada nas soluções dos dois problemas acima, tente resolver as atividades propostas a seguir.

6| Uma empresa colocou no mercado um produto em duas embalagens diferentes, A e B. Depois de algum tempo, entrevistou 200 pessoas num supermercado sobre a preferência pelas embalagens. Dos entrevistados, 120 declararam preferir o tipo A, 142 o tipo B e 30 declararam desconhecer o produto. Quantas pessoas gostariam de encontrar o produto nas duas embalagens?

7| Numa sala de aula, 40 alunos têm noções de inglês, 45 de francês, enquanto que 16 têm noções das duas línguas. Se 2 disseram não ter conhecimento algum de línguas estrangeiras, pergunta-se: quantos alunos tem a classe?

8| Um empresa entrevistou 300 de seus funcionários a respeito de 3 embalagens A., B e C para o lançamento de um novo produto. O resultado foi o seguinte:

A	B	C	A e B	A e C	B e C	A,B e C
160	120	90	30	40	50	10

a) Dos funcionários entrevistados, quantos não tinham preferência por nenhuma das 3 embalagens?
b) Quantos não indicaram a embalagem C?
c) Quantos não indicaram as embalagens B ou C?

1.2 O conjunto dos números naturais

TRATAREMOS aqui dos principais conjuntos de números existentes. Enquanto os conjuntos constituem um meio auxiliar, os números são um dos objetos mais importantes de que se ocupa a Matemática.

Definição:
▶ **Números** são entes (símbolos) abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza.

Lentamente, na medida em que se civilizava, a humanidade apoderou-se do modelo abstrato de contagem (um, dois, três,...) que são ditos **Números Naturais.** Os números naturais surgiram da necessidade de contar objetos (por isso são também chamados números de contagem). A noção desses números tem provavelmente a idade do ser humano. Foi uma evolução demorada. As tribos mais rudimentares ainda contam apenas um, dois, muitos.

▶ *Zero é um número natural?*

É comum surgir essa questão quando se propõe o estudo dos conjuntos numéricos. Assim, a resposta pode ser sim e não. Incluir ou não o número ZERO (0) no conjunto dos números naturais é uma questão de preferência pessoal, ou, mais objetivamente, de conveniência, dependendo do contexto.

Pode-se afirmar que a utilização do símbolo que representa o zero é recente já que é datada do século IX, atribuída aos hindus. Assim, o número zero – que indica o nada, a ausência de objetos, e surgiu muitos séculos depois dos outros números – não é a rigor um número natural. Por razões didáticas não vamos incluir o zero no conjunto dos números naturais.

As necessidades provocadas por um sistema social cada vez mais complexo e as longas reflexões, possíveis graças à disponibilidade de tempo trazida pelo progresso econômico, conduziram, através dos séculos, ao aperfeiçoamento do extraordinário instrumento de avaliação que é o conjunto dos números naturais.

Decorridos muitos milênios, podemos hoje descrever concisa e precisamente o conjunto N dos números naturais, valendo-nos da notável síntese feita pelo matemático italiano **Giuseppe Peano** no começo do século XX.

Definições e observações

Denotamos por N **o conjunto dos números naturais**, formado pelos números 1, 2, 3, 4,... Assim, $N = \{1, 2, 3,...\}$, onde um engenhoso processo chamado **Sistema de Numeração Decimal**, permite representar todos os números naturais com a ajuda dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
A partir das definições: $0 \notin N$, $1 \in N$, $100 \in N$, e também $\{1,2\} \subset N$, $\{0\} \not\subset N$,...

A **essência** da caracterização dos números naturais reside na palavra "**sucessor**". Os primeiros números naturais têm nomes: o sucessor do número um chama-se "dois"; o sucessor de dois chama-se "três", etc.

Deve ficar claro que o conjunto $N = \{1, 2, 3,...\}$ dos números naturais é uma seqüência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significados.

No conjunto N são definidas duas operações fundamentais: **a adição e a multiplicação**. Com efeito:

▶ **A adição**, que aos números $n, p \in N$ faz corresponder à adição (ou soma) $n + p$, onde $(n + p) \in N$;

▶ **A multiplicação**, que lhes associa o produto $n . p$, sendo que $(n . p) \in N$.

Os próximos conjuntos numéricos são ampliações de N, isto é, contêm o conjunto N, têm uma adição e uma multiplicação com as mesmas propriedades que têm os números naturais e outras mais, que constituem justamente o motivo determinante da ampliação.

►*Quanto vale 7 – 3 em N?*

►*Quanto vale 3 – 7 em N?*

Assim, dado um número natural, o **simétrico de a** não existe em N, ou seja, - a $\notin$ N. O resultado disso é que o símbolo **a - b** não tem significado em N para todos **a e b** de N, como na subtração sugerida acima. Dizemos então que em N a subtração não é uma operação fundamental.

A necessidade de representar quantidades que "faltam" para chegar a zero levou à criação dos **números negativos:** -1, -2, -3, ... Atualmente falamos em temperaturas negativas, saldos negativos, etc. Assim, da impossibilidade de efetuar a subtração **a – b** para todos a e b de N, introduz-se um novo conjunto numérico: o conjunto dos **Números Inteiros.**

1.3 O conjunto dos números inteiros

Definições e observações

Chama-se **conjunto dos números inteiros** o conjunto formado pela união do conjunto N, o símbolo 0 (zero) e todos os números simétricos dos números naturais definidos assim: a – b = - (b – a), se a<b.

Por exemplo: 3 – 7 = - (7 – 3) = - 4

Denotamos:
Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}.
O símbolo **Z** é originário da palavra **Zahl**, que em alemão significa número.

FAÇA a representação de Z sobre uma reta:

No conjunto dos números inteiros, efetuamos, sem restrições, adições, multiplicações e subtrações. Persiste, ainda, uma impossibilidade: o quociente (a razão) entre dois números inteiros pode não ser um número inteiro.

De fato, por exemplo, $6 \in Z, 3 \in Z \Rightarrow \frac{6}{3} = 2 \in Z, mas\, \frac{3}{6} \notin Z$.

Assim, $\frac{a}{b} \in Z$ se, e somente se, existe um número inteiro k, tal que a = k . b.

No exemplo acima vemos que $\frac{6}{3} \in Z$ pois existe k = 2 tal que 6 = 2.3.

A necessidade de operar com grandezas que nem sempre podem ser representadas por números inteiros e, consequentemente, exigem subdivisões levou à criação dos números fracionários: $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{5}{2}$, etc.

Ao que tudo indica, as primeiras frações foram representadas simbolicamente pelos egípcios por volta de 1.800 a.C.

Introduz-se assim um outro conjunto de números: **o conjunto dos Números Racionais.**

1.4 O conjunto dos números racionais

Definições e observações

Caso tivermos $\frac{a}{b} \notin Z$, o número $\frac{a}{b}$ é dito número racional.

Chama-se o **conjunto dos números racionais** Q, o conjunto das frações $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b $\neq$ 0. Escrevemos assim:

$$Q = \left\{ x \,/\, x = \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Os números racionais são os que podem ser escritos como quociente de dois inteiros, com o segundo diferente de zero pois não é possível conceber divisão por zero. Vejamos alguns exemplos de números racionais:

$$\frac{7}{1} = 7$$

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

$$\frac{9}{2} = 4,5$$

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

Portanto, podemos concluir que $7 \in Q$; $0,6 \in Q$; $4,5 \in Q$ e $0,333... \in Q$.

Todo número inteiro **a** é também um número racional, sendo assim, podemos afirmar que $Z \subset Q$. Com efeito, se $a \in Z$, podemos escrever $a = \frac{a}{1} \in Q$.

Temos, pois, as seguintes relações: $N \subset Z \subset Q$.

Todo número racional pode ser representado na forma decimal, e podemos ter dois casos:

1º a representação é finita:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{275}{1000} = 0,275; etc$$

ou seja, podemos escrevê-los na forma decimal com um número finito de algarismos após a vírgula.

2º a representação decimal é infinita periódica:

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

$$\frac{47}{90} = 0,5222...$$

$$\frac{2}{7} = 0,285714285714...; etc$$

Apenas é possível representá-los, na forma decimal, com um número infinito de algarismos, embora, a partir de determinada casa, haja uma repetição de algarismos que prossegue indefinidamente.

As representações da forma infinita periódica são as chamadas **dízimas periódicas**. Uma dízima periódica pode ser **simples ou composta** e, sempre representa um número racional que se chama sua **fração geratriz**.

Por exemplo:

▶ $x = 1,333...$ é uma dízima periódica simples e sua fração geratriz é $4/3$. Diz-se que 1 é a parte inteira e 3 é o período (que representa o algarismo, ou o grupo de algarismos, que se repete indefinidamente). A caracterização de uma dízima periódica simples é dada pelo fato de que imediatamente após a vírgula apresenta-se o período.

▶ $x = 0,5222...$ é uma dízima periódica composta e sua fração geratriz é $47/90$. Diz-se que 0 é a parte inteira, 5 é a parte não-periódica e 2 é o período. A caracterização de uma dízima periódica composta é dada pelo fato de que imediatamente após a vírgula, antes do período, apresenta-se um algarismo (ou um grupo de algarismos) que não se repete mais depois. Esse algarismo (ou grupo de algarismos) é chamado de parte não-periódica.

Para obter a representação decimal de um número racional $\frac{a}{b}$, basta dividir a por b.

Reciprocamente, se temos a representação decimal de um número racional, podemos obtê-lo na forma fracionária $\frac{a}{b}$ por meio da resolução de um simples algoritmo.

Como encontrar, por exemplo, a fração geratriz de cada uma das dízimas 0,666... e 2,36444...?

Seja a dízima periódica simples x = 0,666... A idéia é fazermos algumas operações sobre essa equação até que seja possível obter a fração que gera tal dízima. Observe os seguintes passos:

1º **passo:** Considerando a equação x = 0,666..., multiplicamos ambos os membros por 10 já que o período 6, é formado por apenas um algarismo. Assim obtemos: 10x = 6,666...

2º **passo:** Subtraímos membro a membro as equações: 10x – x = 6,666... – 0,666... e obtemos: 9x = 6 (observe que essa subtração transforma o segundo membro da nova equação em um número inteiro);

3º passo: Basta apresentar a solução da equação: $x = 6/9$ e concluir que ela é exatamente a fração geratriz da dízima periódica simples 0,666...

E quando a dízima é periódica composta, como 2,36444...?

Vejamos:

1º passo: Considerando agora a equação x = 2,36444..., seguimos a mesma idéia do exemplo anterior, multiplicando ambos os membros da igualdade por 100 a fim de tornar a parte não-periódica inteira. Dessa forma, 100x = 236,444... (*);

2º passo: O objetivo agora é multiplicar ambos os membros da equação (*) por 10 de modo a obter o período também na parte inteira: 1.000x = 2.364,444... (**);

3º **passo:** Com a finalidade de eliminar a parte decimal e encontrarmos a fração geratriz, fazemos a diferença entre as equações (**) e (*) e obtemos:

$$1.000x - 100x = 2.364,444... - 236,444...$$
$$900x = 2.128$$
$$x = \frac{2.128}{900}$$

No início, pensou-se que o conjunto Q englobasse todos os números. Para a surpresa e indignação de muitos importantes matemáticos, um simples fato, atribuído a Aristóteles, derrubou essa teoria mostrando a existência de um outro conjunto de números, chamado de **Conjunto dos Números Irracionais**.

Conforme BOYER (p. 50) a descoberta do conjunto dos números irracionais está intrinsecamente relacionada à Geometria, mais especificamente, à incomensurabilidade de segmentos de reta.

"Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas na vida do homem, podia ser explicada em termos de ***arithmos****, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões. Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se tome a unidade de medida. Quando ou como foi feita essa descoberta não se sabe, mas muita tinta se gastou em apoio de uma ou outra hipótese. Argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta não têm base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema de incomensurabilidade. A sugestão mais plausível é que a descoberta fosse feita por pitagóricos em algum momento antes de 410 a.C. Alguns atribuem especificamente a Hipasus de Metaponto durante a primeira parte do último quarto do quinto século a.C., enquanto que outros a colocam meio século mais tarde."*

Não vamos nos aprofundar na idéia de incomensurabilidade aqui neste contexto, mas, vale mencionar que a descoberta dos segmentos incomensuráveis é equivalente à descoberta de números que não podem ser expressos na forma decimal como as dízimas periódicas (simples ou compostas).

1.5 O conjunto dos números reais

Com a descoberta da existência de segmentos incomensuráveis se fez necessário a ampliação do conceito de número, introduzindo **o conjunto dos Números Irracionais**, o qual designaremos por I.

A diferença fundamental entre os números racionais e os irracionais, quanto à representação decimal, é a seguinte:

► *"todo número irracional tem uma representação decimal infinita não periódica".*

Por exemplo:
$\sqrt{2} = 1,4142136...$
$\pi = 3,14159...$
$e = 2,71828...$

Em todos esses números, não há algarismo ou grupo de algarismos que se repita periodicamente.

Definições e observações

• A reunião dos conjuntos Q e I resulta no chamado **conjunto dos números reais**, que será denotado por R. Podemos escrever $R = Q \cup I$ e assim, se x ∈ R, então x ∈ Q ou x ∈ I (ou exclusivo).

• Os números irracionais não podem ser representados através de uma fração;

• $N \subset Z \subset Q \subset R$;

• Exemplos de números irracionais:
$\pm\sqrt{p}$, onde p é um número primo; ou seja, $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{7}, ...$ são números irracionais;
Se x é irracional e y é racional, então os números x+y, xy, $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$ são todos irracionais.

• Se x é um *número racional,* x tem *representação decimal infinita e periódica* e, se x é um *número irracional*, x tem *representação decimal infinita e não periódica.*

• Representação de alguns números reais sobre a reta (representação geométrica dos números reais):

• O conjunto dos números reais preenche completamente a reta.

1.6 Resolução de equações do 1º grau em R

O conjunto universo considerado é o Real

Definições e observações

Equação do 1º grau em R, na incógnita x, é toda equação do tipo **ax = b**, onde $a,b \in R$ com $a \neq 0$. Resolver uma equação é encontrar as suas soluções, isto é, encontrar o valor (ou os valores) da incógnita x que satisfaz (em) tal equação.

Com a pretenção de relembrar a prática da resolução de equações do 1º grau, apresentaremos a seguir alguns exemplos:

> **1** Uma balança está equilibrada. Sabe-se que num dos pratos há 3 queijos de mesmo peso mais um peso no valor de 5kg e no outro prato há um peso de 14kg. Quanto pesa cada queijo?

Faça um desenho!

É claro que esse exemplo é apenas para esclarecer os passos que podem ser seguidos no processo de resolução de uma equação de 1º grau. Vejamos:

Para resoluções de problemas envolvendo equações do 1º grau, devemos observar que haverá um valor a ser encontrado, sendo este denotado comumente por "x" (incógnita) e, além disso, teremos uma igualdade.

Assim, pelo enunciado do problema, diz-se que a balança está equilibrada, daí há uma igualdade nessa relação. Temos que em um prato há 3 queijos de um mesmo peso qualquer, que chamaremos de "x" kg e mais 5 kg; e no outro prato, temos 14 Kg. Igualando-se os membros, teremos que:

$$3x + 5 = 14$$

$$3x = 14 - 5$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Portanto, cada queijo vai pesar 3 Kg.

> **2** Suponha que para dar a nota do bimestre, um professor avalia seus alunos através de uma prova e um trabalho: a prova tem peso 2 e o trabalho, peso 1. A nota bimestral é a média ponderada dessas notas dada pela equação: $NB = \frac{2P + T}{3}$. Uma aluna obteve 4,0 no trabalho e precisa ter NB = 7,0. Quanto ela deve tirar na prova?

Observemos que a média ponderada dada é uma igualdade ($NB = \frac{2P + T}{3}$). Queremos descobrir a nota que a menina deve tirar para ser aprovada. Ou seja, encontrar um valor para P (que tem peso 2) onde a relação dada se equivale. Basta substituirmos o valor de seu trabalho (T) na expressão e isolarmos P. Dessa forma obteremos P = 5,6. Essa será a nota necessária para a aluna ser aprovada.

1.7 Resolução de inequações do 1º grau em R

Definições e observações

São inequações que têm ao menos uma incógnita, representada por uma letra (por exemplo, x) e um destes sinais: $<$; $>$; $\leq$ *ou* $\geq$.

A fim de relembrar a prática da resolução de inequações do 1º grau, vejamos a seguir um exemplo:

> Imagine que numa balança há um prato (da esquerda) contendo 5 garrafas de pesos iguais mais um peso de 1 kg e, no outro prato, 3 garrafas de mesmo peso mais dois pesos de 1 kg cada.

Faça um desenho!

Suponha que o prato da esquerda tenha ficado abaixo do prato da direita. Isso quer dizer que o peso do prato da esquerda é maior que o da direita. Denotando o peso de cada garrafa por x, estime a partir de que peso é o de cada garrafa.

Agora temos uma relação sobre a balança, mas não uma igualdade (e sim, uma desigualdade). Lembrando que se quer estimar o peso de cada garrafa e utilizando-se do raciocínio lógico, observemos que:

$$5x + 1 > 3x + 2$$

$$5x - 3x > 2 - 1$$

$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Logo cada garrafa terá peso maior que $\frac{1}{2}kg$.

1.8 Resolução de equações do 2º grau em R

Definições e observações

Uma equação do 2º grau na incógnita x é toda equação do tipo:
$ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R; a \neq 0$

Observe que a $\neq 0$ pois se a = 0, obtemos a equação bx + c = 0 que é uma equação do 1º grau, e não do 2º grau.

Exemplos:

São equações do 2º grau:
$a) 2x^2 - 11x + 5 = 0$
$b) 3x^2 + 7x = 0$
$c) x^2 - 4 = 0$
$d) x^2 - 3 = -2$

A equação do 2º $ax^2 + bx + c = 0$ grau admite uma fórmula resolutiva (dita **Fórmula de Bhãskara**):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O resultado acima pode ser obtido fazendo operações convenientes a partir da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Com efeito, considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e observe os passos a seguir:

1 Multiplique a equação (ambos os membros) por 4a:
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

2 Some b^2 ambos os membros da igualdade:
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

3 O primeiro membro da igualdade é o quadrado da soma de dois termos:
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

4 Agora resolvemos a equação em x:

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

O valor $b^2 - 4ac$, indicado por Δ **(delta)**, é o **discriminante da equação.** Daí, a Fórmula de Bhãskara também pode ser escrita assim: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Antes de relembrarmos os processos de resolução de equações do 2º grau, faremos um recorte histórico[1], que julgamos pertinente, sobre a fórmula de Bhãskara.

[1] Fonte: *A fórmula é de Bhãskara?* Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. (1999). n.39: p.54.

►A fórmula é de Bhãskara?

O hábito de dar o nome de **Bhãskara** para a fórmula de resolução da equação do 2º grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de Bhãskara para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois:

- ►Problemas que recaem numa equação do 2º grau já apareciam, há quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos;
- ►Bhãskara que nasceu na Índia em 1114 e viveu até cerca de 1185 foi um dos mais importantes matemáticos do século XII. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são **Lilavati** ("bela") e **Vijaganita** ("extração de raízes"), que tratam de aritmética e álgebra respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receitas em prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.
- ►Até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do 2º grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de **François Viète**, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Logo, embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhãskara, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Agora, dando ênfase apenas no algoritmo que a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oferece, vamos resolver algumas equações para depois resolver alguns problemas por meio delas:

1 $x^2 - 8x - 20 = 0$

$a = 1; b = -8; c = -20$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.(-20)}}{2.1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 10 \\ x'' = -2 \end{cases}$$

Neste caso, a equação possui duas raízes reais e distintas.

2 $9x^2 - 12x + 40 = 0$

$a = 9; b = -12; c = 40$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.9.40}}{2.9}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 1440}}{18}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-1296}}{18}$$

O resultado anterior mostra que a equação dada não possui solução para o conjunto dos números reais já que não é possível definir a raiz quadrada para um número real negativo.

3 $x^2 - 4x + 4 = 0$

$a = 1; b = -4; c = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

A equação dada possui então duas soluções iguais, x = 2.

▶Qual é o conjunto solução de uma equação do 2º grau?

- se $\Delta > 0$, então existem duas raízes reais e distintas;
- se $\Delta < 0$, então a equação não tem raízes reais;
- se $\Delta = 0$, então existem duas raízes reais e iguais.

Quando b = 0 ou c = 0, dizemos que a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é **incompleta**.

Exemplos:

$a) 10x^2 - 90 = 0$
$b) x^2 - 2x = 0$

Atividades Propostas

1| Diga se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

$a) \pi \in Q$

$b) \sqrt{5} \in N$

$c) \frac{2}{3} \in Z$

$d) \sqrt{-1} \in R$

$e) -3 \in Z$

$f) \sqrt{2} \in Q$

$g) \pi \in I$

$h) \pi^2 \in R$

$i) 2\pi \in Q$

$j) \sqrt{-3} \in I$

2| Resolva, no universo real, a equação do 1º grau: 4(x-3) = 8 – 6x.

3| Resolva, o universo real, as seguintes equações do 1º grau:

$a) 5(x-2)=4x+6$

$b) -4(4-x)=2(x-1)$

$c) -2x=-6$

$d) -3x+1=-8$

$e) 3(x-5)=2$

$f) 2(x+1)=2$

$g) -3(x+2)=-6$

$h) 0,1(x-2)+0,5x=0,7$

$i) 0,4(x+3)-0,2x=4$

$j) 0,3(y-1)+0,4(y-2)=7$

4| Resolva, no universo real, a equação $\frac{(x-2)}{3}+\frac{(x-3)}{2}=\frac{1}{6}$

5| Resolva, no universo real, as equações:

$a) \frac{x-1}{4}+\frac{x}{3}=\frac{1}{6}$

$b) \frac{x+1}{5}+\frac{x-2}{3}=4$

$c) \frac{3x+2}{4}-\frac{x+2}{3}=1$

$d) \frac{2x+1}{6}+\frac{x}{3}=\frac{x-1}{4}$

$e) \frac{10x}{3}+5x=\frac{12-x}{2}$

$f) \frac{x-4}{4}+\frac{3x-1}{3}=1$

$g) \frac{2x-1}{9}-\frac{x-4}{5}=x$

6| Resolva em R as inequações do 1º grau:

a) 3(x-4) > x+2

b) 2(x-1) < 5x+3

7| Resolva em R as inequações do 1º grau:

$a)2x > 10$

$b) - 3x < 12$

$c)2x + 1 \geq x - 5$

$d)3(x - 4) \leq 2(x - 6)$

$e)4(2x - 3) > 2(x - 1)$

$f)\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} \geq 4$

$g)\dfrac{x+2}{5} - \dfrac{x+3}{2} \geq 1$

$h)\dfrac{3y-5}{2} + \dfrac{y-2}{3} \geq 4$

$i)\dfrac{2m-4}{2} + \dfrac{m-1}{3} \leq 1$

8| Resolva em R a equação do 2º grau $x^2-4x+3=0$.

9| Resolva, no universo real, as seguintes equações do 2º grau:

$a)x^2 - 5x + 4 = 0$

$b)x^2 - 7x + 12 = 0$

$c)t^2 - 6t + 8 = 0$

$d)x^2 - 4x + 4 = 0$

$e)x^2 - x + 3 = 0$

$f) - x^2 + 3x - 2 = 0$

$g)y^2 - 6y - 3 = 0$

10| Resolva as seguintes equações incompletas do 2º grau:

$a)x^2 - 3x = 0$

$b)x^2 - 9 = 0$

Respostas

2| R: x = 2.

3| R: *a)*16; b)7; *c)*3; *d)*3; *e)*17/3; *f)*0; *g)*0; *h)*1,5; *i)*14; *j)*81/7.

4| R: x = 14/5

5| R: *a)*5/7; *b)*67/8; *c)*14/5; *d)*-1; *e)*36/53; *f)*28/15; *g)*31/44.

6| R: *a)* x > 7

b) x > - 5/3

7| R: $a)x > 5; b)x > -4; c)x \geq -6; d)x \leq 0; e)x > \frac{5}{3}; f)x \geq \frac{27}{5}; g)x \leq -7; h)y \geq \frac{43}{11}; i)m \leq \frac{5}{2}$

8| R: {1, 3}.

9| R: *a)*{1,4}; *b)*{3,4}; *c)*{2,4}; *d)*{2}; *e)*{ } ; *f)*{1,2} ; *g)* $3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}$ { }

10| R: *a)*{0,3}; *b)*{-3,3}

Referências

BOYER, Carl B. ***História da Matemática.*** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

LIMA, Elon Lages *et al.* ***A Matemática do Ensino Médio.*** Coleção do Professor de Matemática. Vol. 1.Rio de Janeiro: SBM, 1999.

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, ***Samuel. Cálculo: funções de uma variável.*** 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.

Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

Capítulo 2

Problemas de equações do 1º e 2º graus

1 Introdução

2 Resolução de problemas do 1º e 2º graus

3 Atividades propostas

4 Referências

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Problemas de equações do 1º e 2º graus

2.1 Introdução

Diz-se que um problema é do 1º grau quando sua solução é obtida por meio da resolução de uma equação ou de um sistema de equações do 1º grau. De modo análogo, diz-se que um problema é do 2º grau quando sua solução é obtida por meio da resolução de uma equação ou de um sistema de equações do 2º grau.

Consideramos importante esta abordagem de problemas que envolvem resoluções de equações do 1º e 2º graus! Com efeito, o objetivo é perceber que muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos mentalmente, por tentativa e erro, ou, sobretudo, é relevante entender que há sempre uma maneira de resolvê-los através da utilização de uma "linguagem simbólica".

O objetivo deste segundo capítulo é propiciar a você estudante condições de:

- Entender o processo de resolução de equações do 1º e 2º graus;
- Interpretar e resolver problemas práticos que envolvem equações do 1º e 2º graus.

Como atividades práticas utilizando ferramentas da Educação à Distância pretende-se desenvolver fóruns de debates para discutir sobre a interpretação e a resolução dos problemas propostos envolvendo equações do 1º e 2º graus.

A resolução de um problema, do 1º ou do 2º grau, compreende três etapas:

1ª Interpretar e equacionar o problema. Consiste em traduzir para linguagem matemática, através de uma equação ou de um sistema de equações, o enunciado do problema.

2ª Resolver a equação ou o sistema de equações.

3ª Interpretar os resultados obtidos. Consiste em verificar se as soluções encontradas são ou não compatíveis com o enunciado do problema.

2.2 Resolução de problemas do 1º e 2º graus

2.2.1 Exemplos de problemas do 1º Grau

1 Um carpinteiro cortou um caibro de 11m de comprimento em dois pedaços. Um dos pedaços tem 1m a menos do que o dobro do outro. Qual é a medida do maior pedaço?
2 Duas caixas A e B contêm barras de chocolate. A caixa A contém 6 barras a mais que a metade de barras da caixa B. Sabendo que A e B contêm juntas 36 barras, quantas barras de chocolate contém a caixa B?
3 Priscila, Emerson e Ewerton receberam juntos R$205,00 por um trabalho realizado. Priscila recebeu R$5,00 a mais do que Emerson, e Ewerton recebeu R$15,00 a menos do que o triplo do que recebeu Priscila. Quanto recebeu cada um?
4 Na compra de uma camisa tive um desconto de 12% sobre o preço de venda. Qual era o preço de venda sabendo que o desconto foi de R$2,40?
5 O preço de um produto sofreu um reajuste de 12%, aumentando para R$60,48. Qual era o preço desse produto antes do reajuste?

Apresentamos a seguir o processo de resolução desses problemas para que você tente compreender e posteriormente, possa resolver as outras atividades.

1 1ª ETAPA (equacionar o problema):
Seja x a medida do pedaço de caibro menor, daí, pelo problema, o pedaço maior deve medir (2.x – 1) (ou seja, 1 metro a menos do que o dobro do outro). Agora, equacionando o problema temos que: x + 2x – 1 = 11.

2ª ETAPA (resolver a equação):

$$x + 2x - 1 = 11$$

$$3x = 11 + 1$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

3ª ETAPA (interpretação do resultado obtido):
Como a medida x do pedaço menor é igual a 4m, então a medida do pedaço maior é igual a 7m, já que o caibro tinha 11m de comprimento.

2 Suponha que a caixa B contenha x barras de chocolate, logo, a caixa A terá $\frac{x}{2}+6$ (6 barras a mais do que a metade de barras da caixa B). Conforme o problema, as caixas contêm juntas 36 barras, isto é, A + B = 36. Equacionando e resolvendo:

$$\frac{x}{2} + 6 + x = 36 \Rightarrow \frac{x + 12 + 2x = 72}{2} \Rightarrow 3x = 72 - 12 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{3} \Rightarrow x = 20$$

Portanto, a caixa B contém 20 barras.

3 Denote por x o valor recebido por Emerson, logo, Priscila recebeu x + 5 e, como Ewerton recebeu 15 reais a menos do que o triplo de Priscila, temos que Ewerton recebeu 3(x+5) – 15. Segundo o problema, os três receberam juntos 205 reais, podemos assim equacionar e resolver o problema:
Emerson + Priscila + Ewerton = 205

Apresentando uma equação:
$$x + x + 5 + 3.(x + 5) - 15 = 205$$

$$x + x + 5 + 3x + 15 - 15 = 205 \Rightarrow 5x = 205 - 5 \Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{5} \Rightarrow x = 40$$

Como quem recebeu x foi Emerson, temos que ele recebeu R\$40,00. Priscila recebeu x + 5 = R\$40,00 + R\$5,00 = R\$45,00 e, por último, Ewerton recebeu 3(x+5) – 15 = 3.45 – 15 = R\$120,00.

4 Chame de x o preço de venda da camisa, podemos nesse problema usar uma regra de três para encontrar tal valor x. Sabe-se que 12% de x correspondem a R\$2,40 e que o valor de x corresponde a 100%, temos então:

%	Valor em R\$
12	2,40
100	x

Colocando a regra de três em forma de proporção, tem-se:

$$\frac{12}{100} = \frac{2,4}{x} \Rightarrow 12.x = 100.2,4 \Rightarrow 12x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{12} \Rightarrow x = R\$20,00$$

5 Seja x o preço do produto antes do reajuste. Com o reajuste de 12%, o produto passou a valer R\$60,48. Podemos equacionar e resolver:

$$x + 12\%x = 60,48 \Rightarrow x + \frac{12}{100}.x = 60,48 \Rightarrow x + 0,12x = 60,48 \Rightarrow$$
$$1,12x = 60,48 \Rightarrow x = \frac{60,48}{12} \Rightarrow x = R\$54,00$$

2.2.2 Exemplos de problemas do 2º Grau

6 Determinar o número positivo que elevado ao quadrado e subtraído do triplo dele vale 10.
7 A soma das idades de Marco e Antônio é igual a 18 anos e o produto, 72. Determine a idade de cada um, sabendo que Marco é o mais velho.
8 Uma quadra de esportes tem forma retangular, com 300 de área. A frente da quadra tem 13m a menos do que a lateral. Determine as dimensões dessa quadra.
9 A soma de um número natural com o respectivo quadrado é igual a 12. Qual é o número?
10 Determine dois números naturais e consecutivos cujo produto é 156.

Apresentamos a seguir o processo de resolução desses problemas para que você tente compreender e posteriormente, possa resolver as outras atividades.

6 1ª ETAPA (equacionar o problema):
Denote por x o número procurado, daí:
Número procurado: x
Quadrado do número: x^2
Triplo do número: 3x
Equação a ser resolvida de acordo com o problema:

$x^2 - 3x = 10$ (número procurado que elevado ao quadrado e subtraído do triplo dele vale 10)

2ª ETAPA (resolver a equação):

$$x^2 - 3x = 10$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$Fórmula: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-10)}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+7}{2} = 5 \\ ou \\ x = \dfrac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

3ª ETAPA (interpretação dos resultados obtidos):
Como pelo enunciado o número procurado deve ser positivo, a solução x = -2 não satisfaz o problema. Portanto, o número procurado x é igual a 5.

7 Neste problema teremos de resolver um sistema de equações com 2 incógnitas (x e y). De fato, denote por x a idade de Marco e por y a idade de Antônio. Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x.y = 72 \end{cases}$$

Da primeira equação tiramos que y = 18 – x.
Substituindo esse resultado na segunda equação, temos:

$$x.(18 - x) = 72 \Rightarrow 18x - x^2 = 72 \Rightarrow -x^2 + 18x - 72 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 72 = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4.1.72}}{2} \Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{2} \Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{18 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{18+6}{2} = 12 \\ ou \\ x = \dfrac{18-6}{2} = 6 \end{cases}$$

Como x é a idade de Marco que é o mais velho, devemos escolher x = 12 anos, logo, a idade y de Antônio será igual a 6 anos, já que a soma da idade de Marco e Antônio é igual a 18 anos.

8 Faça o desenho da quadra. Denote por x a medida da lateral da quadra. Assim, conforme o problema, a frente mede (x – 13). Sabemos que a área de um retângulo é dada pelo produto das dimensões (isto é, base x altura). Desse modo equacionamos o problema:

$$x.(x - 13) = 300 \Rightarrow x^2 - 13x = 300 \Rightarrow x^2 - 13x - 300 = 0$$

Agora, resolva você a equação acima (usando a fórmula de Bhãskara) e conclua que a lateral x=25 metros e portanto, a frente da quadra é igual a (x–13)=25-13=12 metros. Para conferir, observe que o produto entre 25 metros e 12 metros é igual a 300 metros quadrados.

9 Chame de x o número natural que você quer descobrir. A equação ficará:

$$x + x^2 = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

Resolvendo a equação acima pela fórmula de Bhãskara você encontrará duas soluções para x, x = 3 e x = -4. Como o problema pede para acharmos um número natural, ele não pode ser negativo. Assim, devemos descartar x = -4 e o número pedido é 3.

10 Seja x um número natural, então seu consecutivo é dado por (x+1), logo, a equação fica:

$$x.(x+1) = 156 \Rightarrow x^2 + x = 156 \Rightarrow x^2 + x - 156 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau obteremos x = 12 ou x = -13. Como o problema fala em número natural, descartamos a resposta x = -13 e consideramos x = 12. Assim, os números são 12 e seu consecutivo, 13.

Atividades Propostas

Problemas do 1º grau

1| Pensei em um número. Somei-o com 7 e multipliquei-o por 5. Depois, subtraí o dobro do número pensado no início. Deu 23. Em que número pensei?

2| Cada lapiseira custa R$4,00 a mais que um lápis. Então, um lápis custa x e cada lapiseira x+4. Duas lapiseiras e um lápis juntos custam R$11,00. Escreva uma equação em x e a resolva.

3| Conta-se que, certa vez, um bêbado entrou em uma igreja e prometeu contribuir com R$18,00 para os pobres se Sto Antônio duplicasse o dinheiro que ele tinha no bolso. O milagre aconteceu e o bêbado colocou R$18,00 na caixa de esmolas. E gostou tanto que prometeu dar mais R$18,00 se o santo, outra vez, multiplicasse por 2 o dinheiro que tinha no bolso. Novamente, o milagre aconteceu, mas quando o bêbado colocou R$18,00 na caixa de esmolas, percebeu que ficara sem dinheiro algum. Com quanto dinheiro o bêbado entrou na igreja?

4| Os lados de um retângulo medem x e (x-6) centímetros. O perímetro (a soma das medidas dos lados desse retângulo) mede (x+12). Calcule o valor de x.

5| A metade de um número natural somada ao dobro do sucessor desse número resulta 77. Qual é o número?

6| Um empresário gratificará seus três funcionários com um total de R$150,00. João receberá R$10,00 a mais que Antônio. Pedro receberá o dobro de João. Quanto receberá cada um?

7| Um arquiteto vai projetar uma casa num terreno de 1.230m2. Ele recebeu esta instrução: parte do terreno será reserva a um jardim, que deverá ter 1/5 da área ocupada pela construção. Qual deve ser a área ocupada pela construção?

8| É freqüente as pessoas pagarem certo imposto com um desconto de 10% do valor do imposto, quando o pagam antes do prazo.
a) Se o valor do imposto for de R$44,00, quanto a pessoa deverá pagar com o desconto?
b) Uma pessoa, obtendo o desconto, pagou R$31,50. Indique por x o valor do imposto sem desconto, monte uma equação em x e resolva.

9| Determine dois números ímpares consecutivos, sabendo que a diferença entre o triplo do maior e o menor é de duas dezenas.

10| Hoje um pai tem 30 anos a mais que seu filho e daqui a 4 anos sua idade será o quádruplo da idade do menino. Qual é a idade do pai hoje?

11| (Fuvest-SP) Dois quintos do meu salário são reservados para o aluguel, e a metade do que sobra, para a alimentação. Descontados o dinheiro do aluguel e o da alimentação, coloco um terço do que sobra na poupança, restando, então, R$1.200,00 para gastos diversos. Qual é o meu salário?

12| Num quintal há galinhas e coelhos. Se o total de cabeças é 32 e o total de pés é 102, determine o número de galinhas.

Respostas

1| R: -4

2| R: 1

3| R: R$13,50

4| R: 8cm

5| R: 30

6| R: 30, 40, 80

7| R: 1025m²

8| *a)* R: R$39,60
b) R: R$35,00

9| R: 7 e 9

10| R: 36

11| R: R$6.000,00

12| R: 13

Problemas do 2º grau

1| Para x = 2, a expressão $5x^2-12x+4$ dá 0. É verdade que existe outro valor real de x para o qual essa expressão também dá 0? Qual?

2| Um canteiro retangular tem 4m de comprimento e 3m de largura. Ao seu redor, externamente, será feito uma calçada de largura x. Há material para cimentar uma área de $30m^2$. Para aproveitar todo esse material, qual deve ser a largura dessa calçada?

3| Considere as expressões x^2-5x-6 e $2x-16$. Encontre os valores reais de x para os quais:

a) a 1ª expressão dá 0;
b) a 2ª expressão dá 0;
c) a 1ª expressão dá 8;
d) a 2ª expressão dá 8;
e) as duas expressões têm valores iguais.

4| A figura deste problema representa um quadrado com lados de 12cm. Em dois cantos opostos, temos dois quadrados iguais, com lados de x cm (sendo $x<6$). As medidas estão indicadas em centímetros.

a) Qual é a expressão que dá a soma das áreas, em cm^2, dos dois quadrados com lados de x cm?

b) Juntando-se os dois triângulos da figura, obtemos um quadrado. Qual é a expressão que dá a medida, em centímetros, dos lados desse quadrado? E a que dá a área, em cm^2, desse quadrado?

c) Para encontrar a expressão que dá a área do polígono assinalado na figura, você pode calcular a área do quadrado maior, subtrair a soma das áreas dos dois quadrados dos cantos e, depois, subtrair ainda a área do quadrado obtido com a junção dos dois triângulos. Fazendo isso, que expressão se obtém?

d) Para que valores de x o polígono inscrito no quadrado terá uma área de $45m^2$?

5| No centro de um terreno retangular de 31m de comprimento e de 20m de largura, será construída uma casa. Ela ocupará uma área de $200m^2$. Em volta da casa, será deixada uma área para calçada de largura 2x (do lado do comprimento de 31m) e de x (do lado da largura de 20m).

a) A largura da casa, em metros, é 20-2x. Qual é a expressão que indica o seu comprimento?

b) E a expressão que indica a área?

c) Encontre o valor de x e apresente o comprimento e a largura da casa.

6| A medida da base de um triângulo é x cm. A altura mede (x-4) cm. Ache as dimensões desse triângulo, sabendo que sua área é igual a 5 centímetros quadrados. A área de um triângulo é dada pela metade do produto da base pela altura do triângulo.

7| Calcule as medidas dos lados de um retângulo cujo perímetro é 40cm e cuja área é igual a 75cm.

8| Fábio é mais velho que João 5 anos. A razão entre os quadrados de suas idades é $\frac{4}{9}$. Determine a idade de cada um.

Respostas

1| R: 2/5

2| R: 1,5m

3| *a)* R: 6e-1
b) R: 8
c) R: 7e-2
d) R: 12
e) R: 2e5

4| *a)* R: $2x^2$
b) R: lado=12-x; área=$(12-x)^2$
c) R: $-3x^2+24x$
d) R: 3 ou 5

5| *a)* R: 31-4x
b) R: (31-4x).(20-2x)
c) R: x=3,75

6| R: 5cm

7| R: 5 e 15

8| R: 10 e 15 anos

Referências

As referências deste capítulo são adaptações da autora de vários livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.

Capítulo 3

Intervalos

1 Introdução

2 O que são intervalos de números Reais?

3 Atividades propostas

4 Referências

Intervalos

3.1 Introdução

O OBJETIVO deste terceiro capítulo é propiciar a você estudante condições de:

► *Compreender o que são intervalos de números reais.*

Cotidianamente mencionamos exemplos que tratam de intervalos de números reais, sem percebermos exatamente que são deles que estamos mencionando. Por exemplo, podemos pensar num deslocamento, por um intervalo de tempo, observando os marcos quilométricos da estrada. Num sentido crescente, aumentando, no outro, decrescente, diminuindo. Num outro exemplo podemos imaginar que ao assistir a previsão do tempo em alguma emissora de TV, o repórter diz que a temperatura mínima do dia foi de 17°C e a máxima foi de 24°C. Isso quer dizer que a temperatura t do dia oscilou entre 17 e 24 °C, ou seja, t pertence ao intervalo [17,24].
Além das atividades que apresentamos aqui neste texto, pretende-se propor atividades extras de apoio sobre intervalos.
Apresentamos a seguir as definições matemáticas de intervalos de números reais.

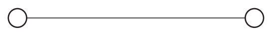
3.2 O que são intervalos de números Reais?

Definições e observações

Os intervalos são particulares e importantes subconjuntos do conjunto R (dos números reais).

Sejam a e b números reais, a<b. Os intervalos são assim denominados e representados:

Aberto: $]a,b[=\{x \in R \,/\, a < x < b\}$, cuja representação geométrica é:



Fechado: $[a,b]=\{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$, cuja representação geométrica é:

Semi-aberto à esquerda: $]a,b]=\{x \in R \,/\, a < x \le b\}$, cuja representação geométrica é:

Semi-aberto à direita: $[a,b[=\{x \in R \,/\, a \le x < b\}$, cuja representação geométrica é:

Esses intervalos são ditos **finitos** (embora contenham infinitos números reais!). Podemos considerar, também, os intervalos **infinitos**, a saber:

Intervalo	Representação por conjunto	Representação geométrica
$]a,\infty[$	$\{x \in R \,/\, x > a\}$	
$[a,\infty[$	$\{x \in R \,/\, x \ge a\}$	
$]-\infty,b[$	$\{x \in R \,/\, x < b\}$	
$]-\infty,b]$	$\{x \in R \,/\, x \le b\}$	

Todo o conjunto R pode ser identificado com o intervalo: $]-\infty,+\infty[$. Como os intervalos são subconjuntos particulares de R, podemos operar com eles da mesma maneira que para quaisquer conjuntos. Aqui, R será o conjunto universo.

Atividades Propostas

1| Preencha a tabela seguinte:

Intervalo	Representação por conjunto	Representação geométrica
]-1,3[	$\{x \in R \,/\, -1 < x < 3\}$	
$[-\frac{1}{2}, 2]$		$-\frac{1}{2}$ ● —— ● 2
		$-\sqrt{2}$ ○ —— ● 0
		1 ● —— ● 5
$]1, +\infty[$		
		-3 ● —— $+\infty$
$]-\infty, -2[$		$-\infty$ —— ● -2
	$\{x \in R \,/\, x \le -\sqrt{3}\}$	

2| Sejam os intervalos A = [-1,3[e B = $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$. Faça a representação geométrica de cada conjunto e apresente por meio de intervalo:

$a) A \cup B$

$b) A \cap B$

3| Sejam os intervalos C = [0,3] e D =]1,4[. Determine sua representação geométrica e apresente geometricamente, por meio de intervalo e por conjunto:

$a) C \cup D$

$b) C \cap D$

4| Represente geometricamente e por meio de intervalo cada um dos conjuntos abaixo:

$a) A = \{x \in R \,/\, x - 1 > 3\}$

$b) B = \{x \in R \,/\, 4 - x < 1\}$

$c) C = \{x \in R \,/\, x^2 - 6x + 5 = 0\}$

Referências

As referências deste capítulo são adaptações da autora de livros didáticos de Matemática e também:

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, Samuel. ***Cálculo: funções de uma variável.*** 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.

Capítulo 4

O conceito de função

1 Introdução

2 Noção intuitiva de função

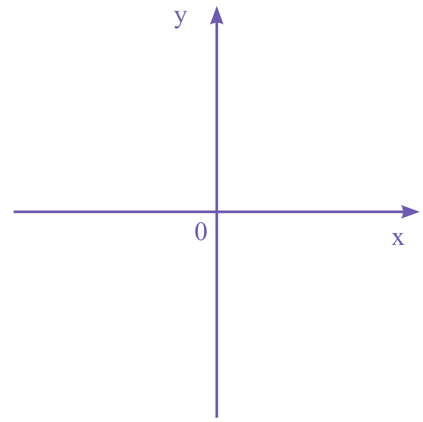
3 O conceito matemático de função

4 Representação gráfica

5 Domínio, contradomínio e imagem

6 Atividades propostas

7 Referências



O conceito de função

4.1 Introdução

Um dos temas mais importantes nesta disciplina é a análise das associações entre quantidades físicas ou matemáticas. Tais associações podem ser descritas através de GRÁFICOS, FÓRMULAS, DADOS NUMÉRICOS ou PALAVRAS. A idéia básica que está por trás de quase todas as associações matemáticas e físicas é o conceito de FUNÇÃO.

> O objetivo deste quarto capítulo é propiciar a você estudante condições de:
> - Refletir sobre a noção intuitiva de função e como ela pode ser utilizada no cotidiano;
> - Relacionar o conceito de função com a Física;
> - Compreender a construção do gráfico de uma função;
> - Relacionar as funções com seus respectivos domínios, contradomínios e imagens.

Pretende-se também discutir em chat atividades que tratem dos conceitos relacionados às funções e suas aplicações no cotidiano.

Ao término do estudo deste capítulo você fará a primeira avaliação desta disciplina de Pré-Cálculo, ela será uma avaliação escrita sobre os temas já estudados até agora e com peso de 2,0 pontos. Ela é apenas uma das ferramentas pedagógicas para analisarmos como vai seu desempenho e o que poderemos fazer para melhorá-lo ainda mais.

Conforme VERAS (1999), ao contrário do que muitos pensam, a primeira idéia de função não surgiu de conceitos matemáticos, mas de observações de fatos que ocorrem na natureza. Só muito mais tarde se conceituou a função de forma matemática. E hoje existe também uma tendência muito grande de encarar as Ciências, ditas Humanas, com técnicas quantitativas.

O gráfico de uma função fornece um método para descrever como uma quantidade (variável) depende da outra. Intuitivamente, a palavra função evoca uma idéia de dependência. A importância fundamental desta idéia foi reconhecida por um matemático chamado Leibniz em 1673, quando escolheu o termo **FUNÇÃO** para descrever essa dependência.

Diversas abordagens teóricas e práticas têm sido sugeridas para o estudo das funções, todas com o intuito de buscar significados no estudo destes conteúdos, que normalmente nos parecem tão abstratos.

► *Vejamos alguns exemplos que apresentam relações entre variáveis:*

1 O valor pago pela conta de consumo **C** de água mensal de uma residência depende da quantidade de litros **l** de água consumidos; assim, dizemos que **C** é uma função de **l**.
2 A área **A** de um lote de forma quadrada depende da medida **l** de seu lado; assim, dizemos que **A** é uma função de **l**.
3 A velocidade **v** de uma bola caindo livremente no campo gravitacional da Terra aumenta com o tempo **t** até que ela atinja o chão; assim, dizemos que **v** é uma função de **t**.
4 O preço **p** unitário de um produto depende do número **n** de unidades adquiridas.
5 A quantidade **x** de álcool que ainda permanece no sangue de uma pessoa a cada hora após o consumo depende da quantidade **y** retida inicialmente.
6 O espaço **s** percorrido por um corpo ou objeto no movimento uniforme (com velocidade constante) é função do tempo **t**.

4.2 Noção intuitiva de função

A simbologia característica da linguagem das Ciências Exatas é normalmente estabelecida com o propósito de simplificar e universalizar os conceitos envolvidos. Assim, para o estudo das funções, que estão presentes em vários campos, inclusive na Física, faz-se necessário a compreensão do uso desta linguagem simbólica.

Como mencionamos nos exemplos anteriores, aquelas sentenças podem também ser expressas em símbolos que, pela comodidade de uso, se tornaram universais. Assim, chamando por **A** a área do quadrado e por **l** seu lado, a dependência será expressa por **A = f (l)**, símbolos que afirmam que **A é função de l**. Como A depende de l, A é chamada variável dependente e l variável independente. Da mesma forma pode-se escrever simbolicamente E = f (i) para dizer que a estatura E é função da idade i da criança ou s = f(t) para dizer que o espaço percorrido por um corpo em movimento uniforme é função do tempo.

É possível ainda dizer de que forma A é função de l, E é função de i ou s é função de t. No caso da área do quadrado, sabe-se que a área é sempre igual ao produto de dois lados ou, equivalentemente, igual ao quadrado do lado, isto é $A=l^2$, qualquer que seja o quadrado considerado.

No caso da estatura da criança, em função de sua idade, os fatos não acontecem com o mesmo rigor matemático, embora obedeçam a alguma padronização, como, por exemplo, o fato de existirem faixas etárias de crescimento mais rápido e outras de crescimento mais lento. É possível estabelecer uma estatura-padrão, considerada "normal", para cada idade e construir uma tabela de crescimento para crianças de certa região. Todavia, embora o crescimento de cada criança se aproxime dos dados da tabela, esses dados poderão não ser seguidos, com exatidão, por nem ao menos uma só criança. Mesmo assim, pode-se continuar afirmando que a estatura da criança é função de sua idade e tentar encontrar a expressão matemática que melhor descreve esse fato e reproduza mais de perto a tabela construída de forma estatística.

Em Cinemática, um campo da Mecânica (Física), são estudadas funções ditas horárias (ou funções temporais) como a que descreve o espaço percorrido de um móvel no movimento uniforme, que é feito com velocidade constante. Tal função horária (ou temporal) tem a forma: $\mathbf{s = s_o + v.t}$, sendo que os elementos significam: t é o tempo, a variável independente; v é a velocidade e o coeficiente da variável t e, s_0 é a posição inicial do móvel sobre a trajetória e termo independente.

As funções que descrevem fenômenos físicos, biológicos, sociológicos, estatísticos ou econômicos não obedecem rigorosamente a uma fórmula matemática, mas podem obedecê-la apenas para um pequeno intervalo de valores. Às vezes, esses valores só podem ser positivos, como é o caso de tempo, preços ou quantidades, estaturas ou idades; às vezes, só podem ser expressos em números naturais, como, por exemplo, se a variável representada for número de pessoas ou qualquer outra coisa indivisível.

4.3 O conceito matemático de função

Com freqüência encontramos no cotidiano associações entre duas grandezas variáveis.

O artigo[2] "*A função afim em um estudo interdisciplinar*", apresenta excelentes exemplos envolvendo a Cinemática e as variáveis que podem ser estudadas nessa área.

A Cinemática é o campo da mecânica (Física) no qual são estudados e descritos os movimentos dos corpos, sem considerar os fatores determinantes dos movimentos. Nessa área são estudadas as descrições de movimentos, analisando o espaço percorrido por um móvel na trajetória, sua velocidade e variações desta última, assim como a direção e o sentido do movimento.

Vamos supor então que um movimento uniforme tenha a função horária expressa pela lei (regra ou fórmula) $\mathbf{s = 20 + 10t}$, com s em metros e t em segundos. De acordo com as definições mencionadas anteriormente ($\mathbf{s = s_o + vt}$), podemos perceber que $s_o = 20m$ e $v = 10m/s$

Notamos então, que a medida ***s*** do espaço percorrido por esse móvel, depende da medida ***t*** do tempo gasto para percorrer determinada distância. De fato, observe que se substituirmos t por alguns valores escolhidos na função s = 20 + 10t obteremos dados para o espaço s:

Tempo - t (em segundos)	Espaço - s (em metros)
0	s = 20 + 10x0 = 20 + 0 = 20
1	s = 20 + 10x1 = 20 + 10 = 30
2	
3	

►*Atenção: Complete a tabela acima!*

Pela tabela, observamos que:
- os valores de t e s são diretamente proporcionais, pois, à medida que t aumenta, s também aumenta;
- além disso, a cada variação de +1 em t, uma variação de +10 apresenta-se para s;
- a medida t do tempo é uma grandeza variável;
- a medida s do espaço percorrido pelo móvel é uma grandeza variável, que depende do valor da medida do tempo;
- a todos os valores do tempo estão associados valores do espaço percorrido;
- a cada valor de **t** está associado um único valor de **s**.

Dizemos então:
a) O espaço s percorrido pelo móvel é uma função do tempo t;
b) A associação **s = 20 + 10t** chama-se ***lei da associação*** ou ***fórmula matemática*** dessa função, onde, neste caso, ***t*** é a variável independente e ***s*** a variável dependente.

Podemos pensar numa função como um programa de computador, que toma uma entrada x, opera com ela de alguma forma e produz exatamente uma saída y.

$$\underset{x}{\overset{entrada}{\Longrightarrow}} \underset{f}{\left\langle PROGRAMA \right\rangle} \underset{y}{\overset{saída}{\Longrightarrow}}$$

---

[2] Vide referências no fim deste capítulo.

Definições e observações

Definição matemática de função

Seja A um conjunto não vazio de números reais. Definir em A uma **função** f é explicitar uma regra (lei ou critério) que diz como associar, a cada elemento x de A, um único elemento y do conjunto R (dos números reais), denotamos por $f : A \to R$.
Para indicar a função, escreve-se y = f(x) e lê-se "y é igual a f de x".

Na maioria das vezes, estaremos considerando funções nas quais as variáveis dependentes e independentes são números reais, neste caso, dizemos que **f é uma função real de variável real.**

O número real y é o valor que a função f assume no ponto x, assim, como no exemplo anterior, o número real s é o valor que a função f assume no ponto t.

4.4 Representação gráfica

Dada uma função através de sua fórmula, muitas vezes, precisamos traçar seu gráfico para analisar o seu comportamento no plano e assim, tirar conclusões, fazer previsões, etc. Isso significa obter sua representação gráfica. Vejamos algumas definições:

1º Par Ordenado

Um par ordenado de números reais é um conjunto formado por dois números reais $\{a,b\}$ em que a ordem desses elementos é importante. Denotamos um par ordenado por **(a,b)** – usando parênteses - onde **a** é o primeiro elemento e **b** é o segundo elemento. Daí, os pares ordenados (a,b) e (b,a) são distintos, ou seja, $(a,b) \neq (b,a)$; por exemplo, o par ordenado (-1,2) não é igual ao par ordenado (2,-1).

2º Sistema Cartesiano Ortogonal

Podemos representar graficamente qualquer par ordenado de números reais através do sistema cartesiano ortogonal (eixos ortogonais). Dizemos que esses eixos ortogonais geram o plano cartesiano.

Consideremos dois eixos (retas) formando um ângulo de 90º (reto) os quais chamaremos de eixo-x (horizontal) e eixo-y (vertical) e cujo ponto de interseção **O** chamaremos de origem do sistema cartesiano. Podemos estabelecer uma correspondência (chamada biunívoca) entre os pontos do plano determinado por esses dois eixos e os pares ordenados de números reais.

Observações:

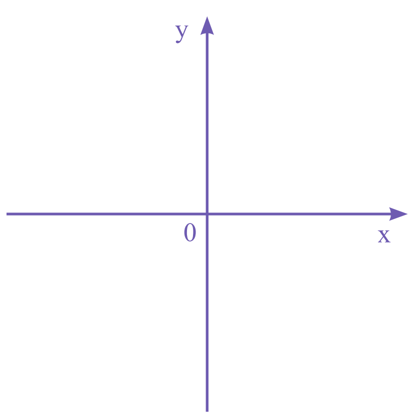
Dado um ponto P num plano determinado pelos eixos x e y, então existe um par ordenado de números reais que corresponde a esse ponto e vice-versa.

- ► O eixo-x é dito o eixo das abscissas e o eixo-y é o das ordenadas.
- ► Diz-se de um ponto P(a,b) que **a** é a abscissa de P e **b** é a ordenada de P.
- ► Os números a e b são ditos coordenadas de P.

Foi o matemático francês René Descartes (1596-1650) que descobriu a Geometria Analítica, área da Matemática na qual se estuda a correspondência que existe entre as curvas do plano e os pares ordenados de números reais. palavra Cartesiano vem da derivação do sobrenome de René em latim “Descartes = Cartesius”. Converse com seu tutor(a), faça uma pesquisa mais minuciosa sobre René Descartes.

3º Representação gráfica de pontos do plano a partir de um sistema de eixos ortogonais

Tome um sistema de eixos ortogonais e represente nele os seguintes pontos (ou pares ordenados): A(1/2,0), B(,-6), C(0,-1), D(4,4), E(-3,-4/3), F(-7,0).



4º Representação gráfica de uma função f

A representação gráfica de uma função f com domínio D, é o conjunto dos pontos (x,y) do plano, tais que x D e y é imagem de algum valor x do domínio, isto é, $y = f(x)$. Uma representação aproximada de f pode ser obtida, calculando-se alguns valores $y = f(x)$ para valores convenientes de x.

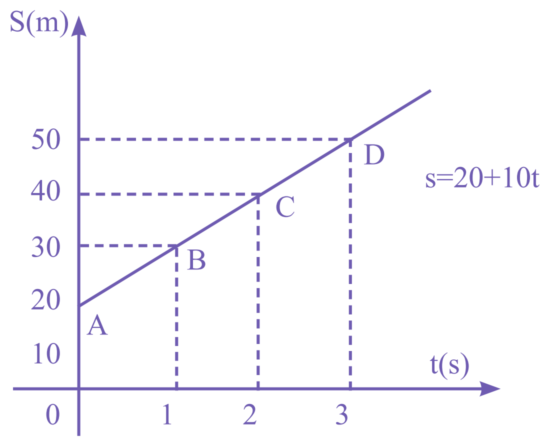
Além disso, dependendo do tipo de função ou de como sua lei é expressa, veremos posteriormente que o comportamento do seu gráfico é sempre o mesmo. Por exemplo:

- os gráficos das funções que têm o modelo $f(x) = ax + b$, com a e b números reais, são sempre retas;
- os gráficos das funções que têm o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais, e $a \neq 0$ são sempre parábolas.

Para analisarmos melhor o gráfico de uma função, vamos tomar o exemplo da Cinemática discutido anteriormente $s = 20 + 10t$, que relaciona o espaço percorrido por um móvel e o tempo. Vimos que atribuindo alguns valores para o tempo, podem-se obter vários pontos que fazem parte do gráfico dessa função, a saber: A(0,20), B(1,30), C(2,40) e D(3,50).

Marcando tais pontos num sistema de eixos ortogonais e considerando que entre dois valores inteiros no eixo t (tempo) existirá sempre um outro valor real entre esses dois valores, isso ocasionará que, entre dois valores inteiros de s (espaço), existirá sempre um outro valor entre esses dois, nesse mesmo eixo, podemos concluir que o gráfico da função $s = 20 + 10.t$ terá o aspecto aproximado da figura abaixo:

Observação:
O movimento descrito pela tabela e o gráfico é progressivo, pois o valor de **s** é crescente conforme aumenta o valor de **t**. Diz-se que o móvel se desloca no mesmo sentido considerado positivo para a trajetória escolhida. A função $s = 20 + 10.t$ é crescente! De fato, para valores de **t** cada vez maiores, os de **s** também são.



4.5 Domínio, contradomínio e imagem

Se y = f(x), então o conjunto de todas as "entradas" possíveis (valores de x) é chamado *domínio de f*. É comum denotarmos o domínio de uma função f por D(f), ou simplesmente, D. O conjunto R dos números reais é dito *contradomínio* da função. Como a definição não obriga que todos os elementos de R sejam atingidos pela lei da função, temos que o conjunto de todas as saídas (valores de y), as quais são resultados obtidos quando x varia sobre o domínio, é chamado de *imagem de f*. É comum denotarmos a imagem de uma função f por Im(f), ou simplesmente, Im. Quando definimos uma função, o domínio D pode ser explicitado (restringido) ou não (neste caso, dependendo do contexto, nós é que devemos estabelecer tal domínio).

Retomando o exemplo da função **s** designada pelo espaço percorrido por um móvel no movimento uniforme em função do tempo **t**, evocada anteriormente: **s = 20 + 10t**, vamos analisar qual é o domínio, contradomínio e imagem dessa função.

Domínio

Na função s = 20 + 10.t temos que s = f(t), assim, para o seu domínio devemos determinar qual é o conjunto formado por todos os valores possíveis que a variável tempo pode assumir. Como a variável tempo não pode ser negativa, então ela pode assumir qualquer valor não negativo. Assim, o domínio da função s é o conjunto de todos os números reais maiores do que ou iguais a zero, isto é, $D(s) = \{t \in R \ / \ t \geq 0\}$.

Contradomínio

Neste contexto de estudo estamos trabalhando com funções reais de variáveis reais, daí, o contradomínio, é um conjunto maior que recebe através da lei que determina a função, todos os resultados para s quando t assume os valores do domínio. Assim, o contradomínio da função s = 20 + 10.t é o conjunto dos números reais.

Imagem

O conjunto imagem é formado por números reais maiores do que ou iguais a vinte, marcado sobre o eixo vertical, dos espaços. Ou seja, $Im(s) = \{s \in R \ / \ s \geq 20\}$.

Observe que a cada par ordenado obtido corresponde um único ponto da reta (que é o gráfico da função) e vice-versa.

Atividades Resolvidas

I A função horária das posições de certo móvel é: s = 30 + 5t (com s em metros e t em segundos).

- A posição inicial s_0 do móvel é dada quando t = 0, daí, $s_0 = 30$ metros;
- A velocidade v do móvel é de 5 m/s;
- A posição do móvel no instante t = 5s é dada por s(5) = 30 + 5. 5 = 30 + 25 = 55 metros[3];
- O instante em que a posição do móvel é s = 80 metros pode ser calculado resolvendo uma equação do 1º grau. Vejamos:

$$30 + 5.t = s \Rightarrow 30 + 5.t = 80 \Rightarrow 5.t = 80 - 30 \Rightarrow 5.t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{5} \Rightarrow t = 10s$$

II Se um móvel apresenta aceleração constante no decorrer do tempo, diremos que ele executa um movimento uniformemente variado (MUV). Nessas condições, a aceleração em qualquer instante apresenta o mesmo valor que a aceleração média.

A função horária das velocidades do MUV é dada por $v = v_0 + at$; onde v_0 e a são constantes e, respectivamente a velocidade inicial e a aceleração média $(a \neq 0)$; e v e t

[3] Neste caso, a expressão 5.5 indica o produto de 5 por 5, isto é, 5.5 = 25. Em outros casos no texto o ponto indicará o produto.

são variáveis, isto é, para cada valor de t existe um correspondente valor de v.

Suponha um móvel que tem a função das velocidades igual a v = 40 – 2t. Assim, o instante em que a velocidade se anula (ou, o móvel pára!) é dado por:

$$v = 0 \Rightarrow 40 - 2t = 0 \Rightarrow -2t = -40 \Rightarrow -2t.(-1) = -40.(-1) \Rightarrow 2t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{2} \Rightarrow t = 20s$$

III Podemos expressar as fórmulas das funções conhecendo a relação existente entre as variáveis envolvidas, vejamos:

a) A receita R de um comerciante que vende a quantidade variável x de mercadoria por dia ao preço unitário de R$10,00 pode ser expressa pela função R(x) = 10x

b) O valor dos Juros Simples J ganhos por um investidor que emprega R$2.000,00 à taxa de 1% ao mês, durante um tempo indeterminado de n meses pode ser expresso pela função J = 2000.1%.n, ou simplesmente, J = 20n.

c) O salário mensal y de um operário que ganha R$450,00 fixos mais R$5,00 por hora extra, sabendo que o número de x horas extras varia todo mês é representado pela fórmula y = 450 + 5x.

IV Seja f uma função definida por y = 2x+1, onde o domínio de f é restringido apenas para o conjunto D(f) = {1, 2, 3}.

Como o domínio da função é o conjunto D, x não poderá assumir valores diferentes de 1, 2 ou 3. O valor de y correspondente a todo $x \in D$ é obtido multiplicando-se o valor de x por 2 e somando-se 1 ao resultado. Assim:

$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 2.1 + 1 = 3$

$x = 2 \Rightarrow$

$x = 3 \Rightarrow$

Faça as contas para x = 2 e x = 3!

Qual é o conjunto imagem dessa função?

V Este exemplo é para você resolver:

Seja a função g dada por $g(x) = x^2 - 4$, com D = [0,6].

a) Represente o domínio da função g por meio de um conjunto e na reta real;

b) Se x é um número real, para essa função, x não poderá assumir valores que não pertençam a este intervalo. Assim, é possível calcular g(8)? E g(0)? Justifique.

c) Calcule g(1), g($\sqrt{2}$), g(5) e g(6).

VI Uma calculadora é vendida a R$15,00 a unidade. Se chamarmos de x a quantidade vendida, então, a receita das vendas é dada pela multiplicação do valor unitário da calculadora por x, ou seja, 15x. Assim, denotando por R(x) a receita das vendas, podemos dizer que R(x) = 15x é uma função que fornece para cada quantidade vendida x a receita correspondente.

Vamos pensar no domínio dessa função?

Só é possível vender uma quantidade maior do que ou igual a zero de calculadoras e, além disso, não podemos afirmar que o domínio da função pode ser expresso por números reais, pois tais números incluem além dos inteiros, números racionais e irracionais. Sendo assim, não é possível vender, por exemplo, 2,5 calculadoras (duas calculadoras e meia). Daí, o domínio da função R(x) = 15x mencionada neste exemplo só pode ser o conjunto dos números inteiros não negativos.

E quanto ao conjunto imagem da função receita R(x) = 15x?

Atribuindo alguns valores do domínio, obtemos:

R(0) = 0; R(1) = 15; R(2) = 30; ...; R(n) = 15n

Logo, é fácil perceber que a imagem dessa função é o conjunto dos múltiplos de 15.

►Considerações sobre o domínio de uma função

Vimos até agora que ao definir uma função devemos definir um domínio e uma regra. Agora, se apenas a regra nos é fornecida, vamos estabelecer que o domínio D dessa função é o conjunto de todos os números reais x, para os quais tem sentido calcular y = f(x).

Vamos determinar o domínio das funções a seguir supondo cada um é subconjunto dos números reais:

$a) f(x) = x + 1$

$b) g(x) = x^2 - 10x + 4$

$c) h(x) = \dfrac{10}{2x - 8}$

$d) f(x) = \sqrt{2x - 3}$

$e) k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 5}}$

a) Observe que o D(f) = R, ou seja, o domínio da função f é o próprio conjunto dos números reais, pois, para quaisquer valores de x pertencentes ao conjunto R, temos que é sempre possível obter uma imagem f(x) também em R.
b) De modo análogo ao item a, D(g) = R.
c) Neste caso devemos ter atenção ao determinarmos o domínio desta função. Com efeito, como ela é uma função dita racional (expressa por fração), ela não pode estar definida quando o denominador for igual a zero, já que não existe divisão por zero. Se 2x – 8 = 0, então x = 4. Logo, o domínio da função h é o conjunto: $\{x \in R \mid x \neq 4\}$, pois, para todos os outros valores reais de x, a função h está definida.
d) Sabemos que no conjunto dos números reais não é possível extrair a raiz quadrada de números negativos. Daí, a função f só estará bem definida para valores reais que satisfaçam a inequação $2x - 3 \geq 0$, ou seja, $x \geq 3/2$. Portanto, o domínio da função $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ é dado pelo conjunto $\{x \in R \mid x \geq 3/2\}$.
e) Para obtermos o domínio da função k devemos observar que além de existir uma raiz quadrada, tal raiz quadrada está no denominador desta função racional. Logo, essa função só estará definida para valores de x tais que (x – 5) sejam maiores do que zero. Portanto, o domínio da função k dada é o conjunto: $\{x \in R \mid x > 5\}$.

Atividades Propostas

1| Para cada uma das funções abaixo, calcule f(-4), f(-3), f(-2), f(-1) e f(0):
a) $f(x) = x^2$
b) f(x) = 2x + 2
c) f(x) = x - 1

2| Dada a função $f: R \rightarrow R$ (uma função f que vai dos números reais nos números reais) definida por f(x) = 3x+1, calcule:
a) f(-2) =
b) f(-10) =
c) f(0) =

3| Sendo $f: R \rightarrow R$ uma função definida por f(x) = x2 - 3x - 10, calcule:
a) f(-2) =
b) f(-1) =
c) f(0) =
d) f(3) =
e) f(5) =

4| Dada a função $f:R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Determine os valores de x para que se tenha $f(x) = -4$ e $f(x) = 0$.

5| Dadas as funções definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, calcule $f(6) + g(-2)$.

6| Considere a função $f:N \rightarrow R$ definida pela lei: $f(x) = o$ se x é par, e $f(x) = 1$ se x é ímpar. Esta é uma função definida em duas partes.
Calcule f(1), f(2), f(25), f(1.000) e f(1.235).

7| Forneça o domínio das seguintes funções:

$a) f(x) = x + 3$

$b) f(x) = \dfrac{5}{x+4}$

$c) f(x) = x^5$

$d) f(x) = \sqrt[3]{x}$

$e) f(x) = \sqrt{x-1}$

$f) f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

8| Dada a função $f(x) = 2x - 3$, obtenha o valor de x tal que $f(x) = 49$ e o valor de x tal que $f(x) = -10$.

9| Dada a função $f(x) = mx + 3$, determine o valor de m, sabendo que $f(1) = 6$.

Referências

ALONSO; FINN. ***Física: um curso universitário***. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

ANJOS, Ivan Gonçalves dos. ***Física***. Coleção Horizontes. São Paulo: IBEP.

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antonio de Toledo. ***Física Básica***: volume único. São Paulo: Atual.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações***. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, Samuel. ***Cálculo: funções de uma variável***. 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.

SILVA JÚNIOR, Geraldo Bull da. ***A função Afim em um estudo interdisciplinar***. PUC-MJ/UFES.

VERAS, Lília L. ***Matemática aplicada à economia***. 3. ed. São Paulo: Atlas: 1999.

Capítulo 5

Funções lineares (ou polinomiais do 1º grau)

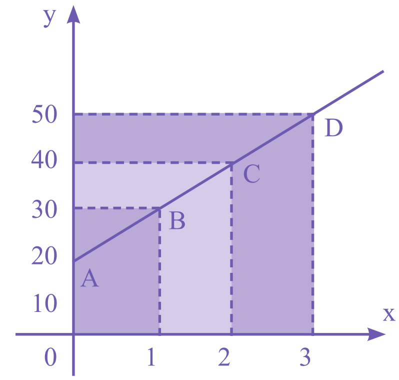
1 Introdução

2 O conceito de função linear ou polinomial do 1º grau

3 Aplicações das funções lineares na física

4 Atividades propostas

5 Referências



Funções lineares (ou polinomiais do 1º grau)

5.1 Introdução

Em muitas situações reais, a taxa com que uma grandeza varia em relação à outra é constante. Nesse caso, é possível estabelecer uma regra ou lei que associa tais grandezas, dita Função Linear.

> O objetivo deste quinto capítulo é propiciar a você estudante condições de:
> ► Compreender os conceitos relacionados às funções lineares;
> ► Discutir as aplicações dessas funções na Física.

Além do estudo deste material impresso, você não pode deixar de participar das atividades utilizando as ferramentas de Ead em que se pretende apresentar atividades extras de apoio (além dos propostos no livro) sobre as funções lineares e também abrir fóruns de debates para discutir as resoluções das atividades propostas no livro que foram mais complexas ou geraram mais dúvidas para você.

Os fenômenos que a Física se preocupa em estudar revelam-se em todas as atividades humanas, e é por isso que vamos priorizar que as aplicações das funções estudadas neste curso estejam relacionadas aos fenômenos físicos.

Vejamos um exemplo

Já mencionamos anteriormente como é o comportamento de um móvel em movimento uniforme. Consideremos que um móvel nesse movimento parta de uma posição inicial de 10 metros e que a cada segundo percorra um espaço de 5 metros. Com essas informações pode-se descrever o espaço percorrido por esse móvel sob a forma de função, traçar o gráfico ou construir uma tabela para tal função descrita.

Vamos expressar a fórmula do espaço percorrido pelo móvel, do exemplo acima, em função do tempo e desenhar o gráfico relacionado.

Primeiro, seja **t** a variável tempo (em segundos) e **s** o espaço correspondente (em metros) percorrido pelo móvel. Do enunciado do exemplo constatamos que o espaço inicial é de 10 metros e que a velocidade (constante) é de 5 m/s. Assim, podemos entender o espaço percorrido do móvel em função do tempo, da seguinte forma:

- quando t = 0s, temos que $s = s_0 = 10m$;
- quando t = 1s, temos que s = 10 + 5.1 = 15m;
- quando t = 2s, temos que s = 10 + 5.2 = 20m;

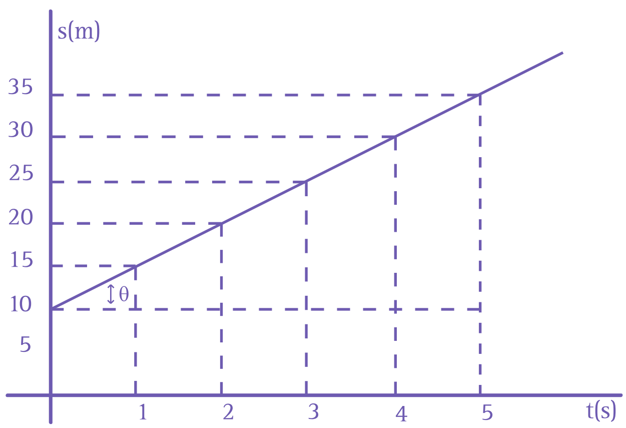
...

- de modo geral, **s = 10 + 5t**.

Qual o domínio da função s = 10 + 5t?

Como a variável tempo pode assumir qualquer valor real não negativo, então **D(s) =** $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$.

E o gráfico dessa função?



No exemplo acima, o espaço percorrido pelo móvel aumenta à taxa constante de 5m/s; assim, o gráfico é uma linha reta cuja ordenada (eixo-y) aumenta de 5 unidades de espaço cada vez que a abscissa (eixo x) aumenta de 1 unidade de tempo.

5.2 O conceito de função linear ou polinomial do 1º grau

Definições e observações

► Uma função cujo valor da imagem varia a uma taxa constante em relação à variável independente é dita **polinomial do 1º grau** ou **função linear** (Linear é porque se pode mostrar em Geometria Analítica que o gráfico de toda função que tem esse modelo é uma linha reta).

► Dessa forma, o gráfico de tal função pode ser obtido bastando determinar dois pontos que satisfazem à função. De fato, dois pontos determinam uma única reta.

► Em termos algébricos, **função linear** é qualquer função da forma **f(x) = mx + b**, onde **m** e **b** são constantes reais quaisquer. Ela é dita também **função polinomial do 1º grau** sempre que $m \neq 0$ (isto é, o expoente da variável independente que acompanha m é igual a **1**, por isso, "**do 1º grau**").

► ATENÇÃO: Quando m = 0, a função fica do tipo f(x) = b, sendo que para todo valor de x real dado no domínio, a imagem será sempre b. Daí, o gráfico dessa função continuará sendo apenas uma reta, mas, paralela ao eixo-x cortando o eixo-y na coordenada b. Nesse caso especial, ela é apenas linear, deixando de ser polinomial do 1º grau.

► No caso da função do exemplo anterior, veja que $m = v = 5$ e $b = s_0 = 10$. Esses valores têm nomes especiais: **b** é dito **coeficiente linear** da reta (que é o gráfico da função) e **m** é dito o **coeficiente angular** da reta.

► **b** é o coeficiente linear, pois é exatamente o ponto em que o gráfico (que é uma linha reta) corta o eixo vertical (das ordenadas) e **m** é o coeficiente angular, pois mede numericamente a velocidade do móvel em cada instante e indica a inclinação que a reta faz com o eixo das abscissas (isso é equivalente a dizer que m representa o valor da tangente do ângulo que a reta fazer com o eixo x).

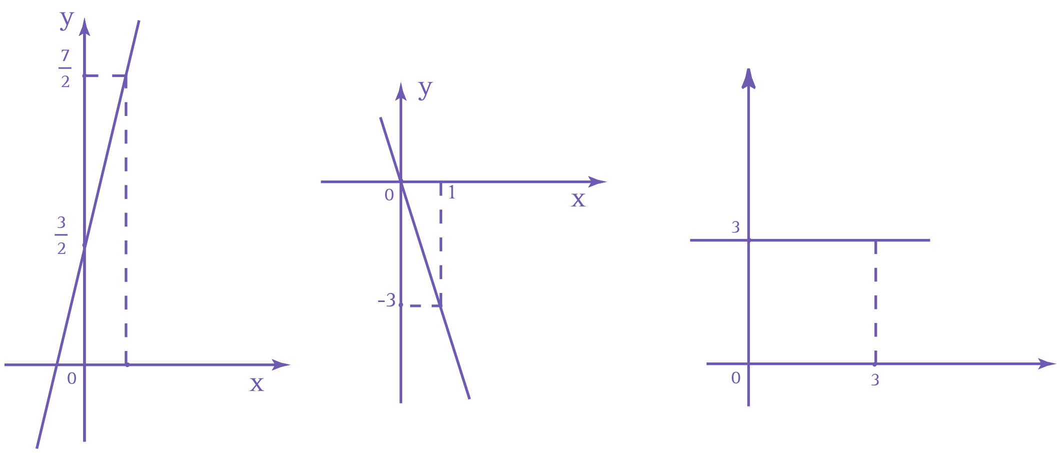
Atividades Resolvidas

I Esboce o gráfico das seguintes funções lineares (considere f função real de variável real):

$a) f(x) = 2x + \dfrac{3}{2}$

$b) f(x) = -3x$

$c) f(x) = 3$



Observações sobre os gráficos obtidos neste exemplo:

- Cada uma das funções propostas é do tipo f(x) = m.x+b, ou seja, é linear;

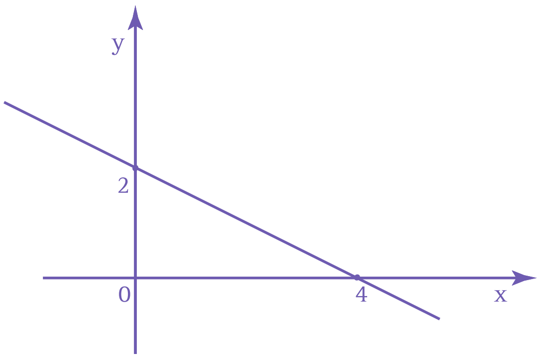
- Como o gráfico de cada uma delas é uma reta, para traçar o gráfico, basta exibir dois pontos quaisquer e obter a "única" reta que passa por esses dois pontos.

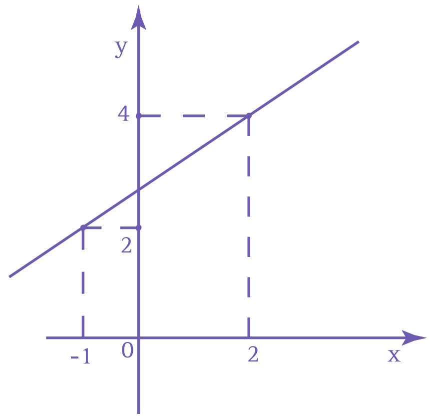
Reflita um pouquinho:

- Se ao invés de ter tomado, no item a, os pontos (0,3/2) e (1,7/2) tivéssemos tomado outros dois pontos para traçar o gráfico da função f(x) = 2x + 3/2, o que aconteceria? Por quê?

II *a)* Esboce o gráfico da função linear que passa pelos pontos (0,2) e (4,0) e obtenha a equação que determina tal função.

b) Esboce o gráfico da função linear que passa pelos pontos (-1,2) e (2,4) e obtenha a equação que determina tal função.





Observações

- Como foi dito que a função é linear então, para obter os gráficos bastou exibir a reta que passa por cada um dos pares de pontos dados nos itens a e b.

- A fórmula de cada uma das funções é do tipo f(x) = m.x + b ou, y = m.x + b. Sabendo disso, é possível, conhecendo dois pontos de cada uma, encontrar a equação que cada uma delas determina.

- Vejamos:

▶ No item a, é fácil observar que o coeficiente linear é 2, já que é o ponto que a reta corta o eixo-y, isto é, na função y = m.x + b, o valor de b é 2. Agora, para obter o valor de m, vamos substituir o ponto (4,0) que satisfaz à reta, na equação m.x + b = y: m.4 +2 = 0 ⟶ 4.m = -2 ⟶ m = -2/4, ou seja, m = - ½. Assim, a fórmula que determina a função é y = -½.x + 2.

▶ De modo análogo podemos resolver o item b, porém, não temos o coeficiente linear, daí, precisamos substituir os pontos dados na equação da reta e resolver um sistema linear de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} m.2 + b = 4 \\ m.(-1) + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.m + b = 4 \\ -m + b = 2 \end{cases}$$

Na segunda equação vemos que b = 2+m, e substituindo b na primeira equação obtemos:

$$2m + 2 + m = 4$$
$$3m = 4 - 2$$
$$3m = 2$$
$$m = \frac{2}{3}$$

Agora, para encontrar o valor de b, temos que b = 2 + m, logo: $b = 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{8}{3}$.

Assim, encontramos a equação que determina a reta do item b, que é dada por $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

5.3 Aplicações das funções lineares na física

Nesta seção apresentamos alguns problemas resolvidos que são aplicações das funções lineares na Física.

Atividades Resolvidas

I A função temporal de um movimento uniforme é dada pela tabela seguinte:

t(s)	0	1	3	8
s(m)	2	7	17	42

Qual é a função temporal (ou horária) do movimento? Construa o gráfico do espaço em função do tempo.

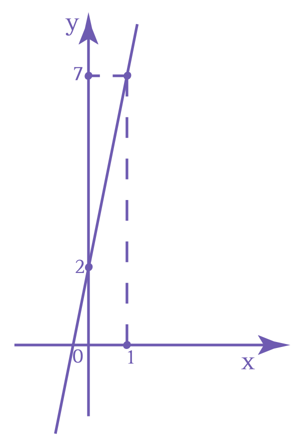
Resolução

Analisando a tabela fornecida notamos que o espaço percorrido pelo móvel aumenta 5 metros a cada segundo (esta é a taxa de variação do movimento) e, além disso, o espaço inicial (quando t = 0) é igual a 2 metros. Logo, sabendo que o movimento uniforme obedece à lei $s = s_0 + v.t$, temos que a função horária desse movimento é $s = 2 + 5.t$.

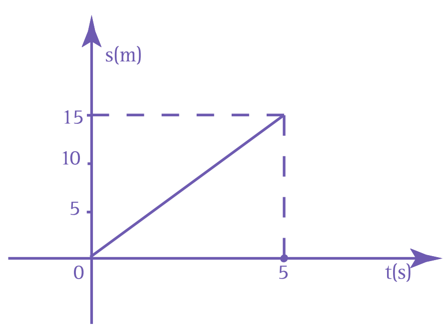
Podemos também concluir da tabela que, a fórmula função horária do movimento satisfaz aos pontos (0,2); (1,7); (3,17); (8,42). Assim, de forma análoga ao exemplo 2 do item anterior, podemos obter a função horária do movimento.

O gráfico da função horária segue ao lado, considerando o eixo x como o tempo (em segundos); e o eixo y como o espaço percorrido (em metros).

Como sabemos que a função horária é do tipo y = mx + b (linear) então o gráfico é uma reta (neste caso é uma semi-reta, pois a trajetória do móvel começa no ponto (0s,2m)), portanto, não é necessário marcar no gráfico todos os pontos sugeridos pela tabela para traçamos tal semi-reta, bastam apenas dois!



II A posição de um atleta em uma corrida varia no decorrer do tempo de acordo com o gráfico abaixo. Qual é a função temporal do movimento do atleta?



Resolução

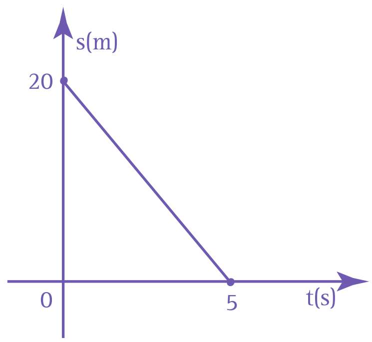
Observando o gráfico, a posição inicial do atleta é 0m e a cada 5 segundos o espaço percorrido é de 15 metros. Vamos encontrar a função horária do movimento do atleta substituindo o ponto (5s,15m) na função $s = s_0 + vt$, sabendo que $s_0=0$ para obter primeiro a velocidade constante:

$$15 = 0 + v.5 \Rightarrow 5v = 15 \Rightarrow v = \frac{15}{5} \Rightarrow v = 3m/s$$

Então, sabendo-se que a velocidade é de 3m/s, a função horária do movimento do atleta será: s = 0 + 3.t, ou seja, s = 3.t.

Atenção: não é complicado perceber que é possível determinar a velocidade do atleta sem fazer a conta anterior, basta entender que se a cada 15 metros gasta-se 5 segundos, então, em média, o atleta percorre 15/5 = 3m/s.

III O gráfico do espaço em função do tempo para uma motocicleta que realiza movimento uniforme é o representado abaixo. Encontre a velocidade da motocicleta e a função temporal do movimento.

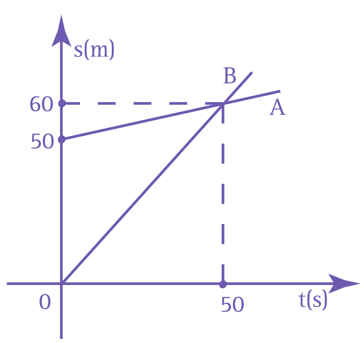


Resolução

O gráfico apresenta o movimento uniforme que uma motocicleta realiza em função do tempo. Observe que o espaço inicial é igual a 20m (isto é, quando t = 0s, s = 20m) e também que motocicleta encerra o movimento em 5 segundos (isto é, quando t = 5s, s = 0m). Encontrando a velocidade do atleta: basta substituirmos o ponto (5s,0m) na função horária $s = s_0 + vt$. Assim: $0 = 20 + v.5 \Rightarrow 5v = -20 \Rightarrow v = \frac{-20}{5} \Rightarrow v = -4m/s$

Essa velocidade negativa indica que a motocicleta percorre o percurso no sentido oposto ao adotado como positivo, ou seja, ela corre no sentido negativo do eixo x (ou eixo s). Logo, a função horária do movimento da motocicleta é s = 20 – 4t.

IV O gráfico abaixo mostra os dados obtidos durante o movimento simultâneo de dois objetos móveis, A e B, numa mesma trajetória. Encontre a velocidade de cada um dos objetos móveis; o instante em que há a ultrapassagem entre eles e a posição em que ocorre essa ultrapassagem.



Resolução

Neste exercício vamos analisar o movimento uniforme de objetos móveis numa mesma trajetória.

Precisamos encontrar a velocidade de cada um dos móveis. A trajetória do móvel B se inicia em s = 0m quando t = 0s e, também passa pelo ponto (50s,60m). Então, para o carro B tem-se que a velocidade é obtida substituindo-se o ponto (50s,60m) na função horária $s = s_0 + v.t$.

Dessa forma: $0 + v.50 = 60 \Rightarrow 50v = 60 \Rightarrow v = \frac{60}{50} \Rightarrow v = \frac{6}{5} \Rightarrow v = 1,2m/s$. Assim, a função horária da trajetória do carro B é dada por s = 1,2t.

Para o carro A temos que quando t = 0s, o espaço inicial é igual a 50m, e igualmente à trajetória do carro B, passa pelo ponto (50s,60m). Encontrando a velocidade do carro A: $50 + v.50 = 60 \Rightarrow 50v = 60 - 50 \Rightarrow 50v = 10 \Rightarrow v = \frac{10}{50} \Rightarrow v = 0,2m/s$. Assim, a função horária da trajetória do carro A é dada por s = 50 + 0,2t.

Observe que os carros se encontram exatamente no ponto em que os gráficos de seus movimentos se cruzam, isto é, no ponto t = 50s e s = 60m.

Logo, o instante t em que há a ultrapassagem entre os carros é t = 50s e a posição em que ocorre essa ultrapassagem é s = 60m.

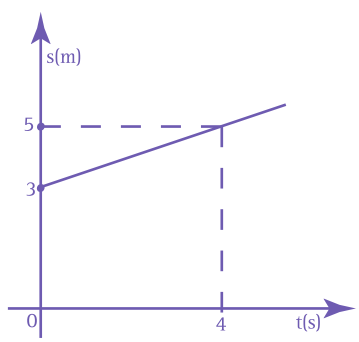
Agora é sua vez! Tente resolver os exercícios de aplicação a seguir!

1| O espaço s do movimento de um carro varia no decorrer do tempo de acordo com os dados da tabela abaixo:

t(s)	0	1	2	3
s(m)	20	18	16	14

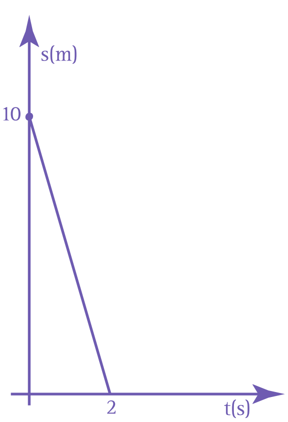
Escreva a função temporal do movimento e construa o gráfico do espaço em função do tempo, indicando o instante em que o carro passa pela origem da trajetória.

2| O gráfico abaixo representa o movimento uniforme de uma bicicleta. Encontre a função temporal desse movimento e estime a variação de espaço ocorrida nos doze segundos iniciais.



3| Observe o movimento do móvel, através do gráfico abaixo, e determine:

a) o espaço inicial do móvel;
b) a velocidade do móvel;
c) o instante em que o móvel passa pela origem;
d) a função temporal do movimento.



Referências

ALONSO; FINN. ***Física: um curso universitário.*** São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

ANJOS, Ivan Gonçalves dos. ***Física.*** Coleção Horizontes. São Paulo: IBEP.

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antonio de Toledo. ***Física Básica***: volume único. São Paulo: Atual.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.*** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, Samuel. ***Cálculo: funções de uma variável.*** 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.

SILVA JÚNIOR, Geraldo Bull da. ***A função Afim em um estudo interdisciplinar.*** PUC-MJ/UFES.

VERAS, Lília L. ***Matemática aplicada à economia.*** 3. ed. São Paulo: Atlas: 1999.

Capítulo 6

Funções quadráticas (ou polinominais do 2º grau)

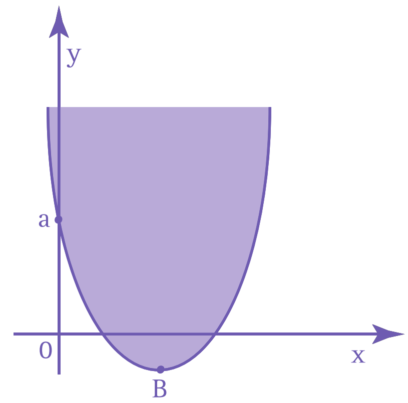
1 Introdução

2 O conceito de função polinomial do 2º grau

3 Aplicações das funções quadráticas na física

4 Atividades propostas

5 Referências



Funções quadráticas (ou polinominais do 2º grau)

6.1 Introdução

EM MUITAS SITUAÇÕES, a relação entre duas grandezas variáveis pode ser expressa de maneira diferente da forma exibida nas funções lineares (no capítulo anterior). Vamos neste capítulo estudar as funções polinomiais do 2º grau!

O objetivo deste sexto capítulo é propiciar a você estudante condições de:

- Compreender os conceitos relacionados às funções quadráticas;
- Discutir as aplicações dessas funções na Física.

Além do estudo deste livro, você não pode deixar de participar das atividades utilizando as ferramentas de Ead em que se pretende apresentar atividades extras de apoio (além dos propostos no livro) sobre as funções quadráticas e também abrir fóruns de debates para discutir as resoluções das atividades propostas no livro que foram mais complexas ou geraram mais dúvidas para você.

Lembrando que estamos num curso de Física, vamos ver onde funções desse tipo surgem?

Comentamos até agora sobre trajetória de móveis segundo o movimento uniforme, que é aquele em que o móvel tem velocidade média[1] escalar igual à velocidade escalar instantânea[2], ou seja, a velocidade escalar instantânea é constante. Entretanto, existe também ou outro tipo de movimento dito **Movimento Uniformemente Variado (MUV)** em que a velocidade escalar varia uniformemente no decorrer do tempo.

Nosso enfoque aqui é sobre o estudo de funções, portanto o objetivo não é apro-

[1] A velocidade escalar média (vm) de um móvel pode ser definida pela razão entre a variação do espaço e o intervalo de tempo em que ocorreu.

[2] A velocidade escalar instantânea pode ser entendida como uma velocidade escalar média para um intervalo de tempo tendendo a zero. Por exemplo, o velocímetro de um automóvel mede a velocidade escalar instantânea, já que mostra a velocidade do carro em cada instante.

fundar nos conceitos da Física, só vamos utilizá-los para mostrar como a Matemática oferece recursos para resolver problemas dessa área.

No caso do MUV a velocidade escalar sofre variações sempre iguais em intervalos de tempos iguais. Conseqüentemente, a aceleração escalar instantânea do movimento é que é constante e daí, a aceleração escalar média é igual à aceleração escalar em qualquer instante.

Vejamos um exemplo para esclarecer melhor essa idéia: uma pessoa registra, sucessivamente, a partir de certo instante, a velocidade indicada pelo velocímetro do carro e o instante de tempo correspondente no cronômetro e obtém a tabela:

v(km/h)	10	15	20	25	30	35	40	45	50
t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Observe que a partir da velocidade escalar inicial de 10km/h, a velocidade escalar varia sempre de 5km/h a cada segundo. Portanto, a aceleração média e instantânea para esse movimento é $\alpha_m = \alpha = \dfrac{5km/h}{s}$.

Quando você estiver estudando Cinemática no curso de Física irá compreender que a função horária do MUV tem uma fórmula especial que segue o modelo seguinte:

$$s = s_0 + v_0.t + \frac{\alpha}{2}.t^2$$

À medida que um móvel descreve um MUV, sua posição varia sobre a trajetória. No instante t_0=0, o móvel ocupa uma posição dada pelo espaço inicial s_0; num instante posterior t, a posição do móvel corresponde ao espaço s.

Na fórmula acima temos que a variável independente é o tempo (t) e a variável dependente é o espaço (s); já o espaço inicial (s_0), a velocidade escalar inicial (v_0) e a aceleração escalar (α) são constantes para cada movimento. Observe que o maior expoente da variável independente t é 2. Isso caracteriza a função polinomial do 2º grau, ou, como a variável independente está elevada ao quadrado, a função também é dita quadrática.

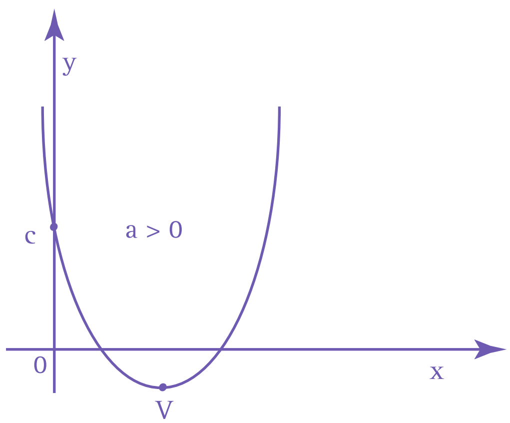
6.2 O conceito de função polinomial do 2º grau

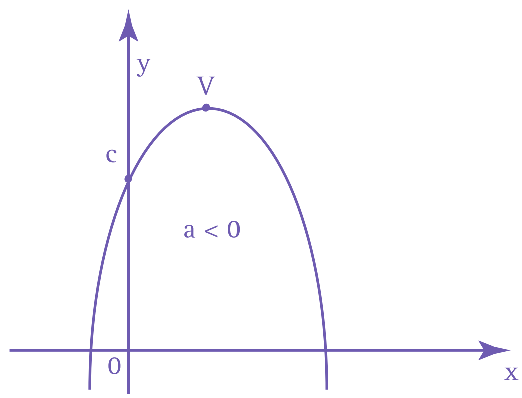
Definições e observações

Uma **função polinomial do 2º grau** é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são constantes reais e $a \neq 0$.

O gráfico de toda função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, é uma curva chamada PARÁBOLA (uma cônica[3]). A concavidade é voltada para cima, se $a > 0$, e para baixo, se $a < 0$. Não vamos demonstrar aqui esse fato, apenas faremos tal afirmação, pois o mais importante neste contexto é a interpretação prática de situações-problema que envolvem as funções polinomiais do 2º grau e alguns fenômenos físicos.

Observe as parábolas abaixo:





▶Como construir o gráfico de uma parábola?

Podemos construir o gráfico de uma parábola com ajuda de uma tabela de valores x e y, mas nem sempre conseguimos uma boa construção, pois podemos exibir pontos do gráfico que não caracterizam bem tal curva. Assim, vamos apresentar passos que nos ajudam a construir um "bom" gráfico para uma função quadrática!

O ponto $V(x_V, y_V)$ é dito o vértice da parábola. Se $a > 0$, a abscissa do vértice é um ponto de mínimo; se $a < 0$, a abscissa do vértice é um ponto de máximo.

Os pontos de interseção com o eixo x são obtidos fazendo $y = 0$. Assim teremos a equação do 2º grau para resolvermos: $ax^2 + bx + c = 0$.

No processo de resolução de uma equação de 2º grau podemos obter três situações:

▶ se a equação tiver duas raízes reais distintas ($\Delta > 0$), a parábola interceptará o eixo x em dois pontos distintos;

▶ se a equação tiver duas raízes iguais ($\Delta = 0$), a parábola interceptará o eixo x em um único ponto;

▶ finalmente, se a equação não tiver raízes reais ($\Delta < 0$), a parábola não interceptará o eixo x.

As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são ditas também "zeros da função quadrática", pois são os valores de x reais tais que $y = 0$.

E a interseção da parábola com o eixo y?

A interseção com o eixo y é obtida fazendo $x = 0$: substituindo $x = 0$ na função

[3] Aproveite a ocasião e faça uma pesquisa sobre as cônicas! Discuta com seu tutor!

$y = ax^2 + bx + c$ obtém-se y = c. Logo, (0,c) é o ponto de interseção da parábola com o eixo y.

A abscissa do vértice é dada por: $x_V = \frac{-b}{2a}$ e a ordenada: $y_V = f(x_V) = \frac{-\Delta}{4a}$. Para obter a ordenada y, da abscissa x do vértice, basta também, substituí-la no lugar de x na função e obter assim, a imagem do x do vértice.

Os exemplos a seguir são apenas para ilustrar os passos mais importantes para obtermos uma boa construção do gráfico de funções quadráticas. Veremos a seguir algumas aplicações dessas funções na Física.

Atividades Resolvidas

I Esboce o gráfico e estude o sinal da função $y = x^2 - 4x + 3$.

▶ A função é quadrática, daí, sabemos que seu gráfico é uma parábola. Observando que a = 1, b = -4 e c = 3, podemos já concluir que sendo a>0, a concavidade dessa parábola é voltada para cima. Logo, o vértice dessa parábola assume um ponto de mínimo;

▶ O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, pois, ela está definida para qualquer número real;

▶ Vamos encontrar o ponto de interseção da parábola com o eixo y, para isso, basta fazer x = 0 na função e obtemos y = 3, ou seja, encontramos o ponto (0,3);

▶ Agora, obtendo os zeros da função nós vamos encontrar os pontos de interseção da parábola com o eixo x. Para isso vamos utilizar a fórmula de Bhãskara:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

Assim, a parábola cortará o eixo x nos pontos 1 e 3. As coordenadas de tais pontos são (1,0) e (3,0).

▶ Por fim, é importante verificar qual é o vértice da parábola, já que sabemos que ele será um ponto de mínimo, pelo fato da concavidade ser voltada para cima. Assim:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

Para obtermos o y_V temos duas alternativas:

i) substituir $x_V = 2$ na função:

$$y_V = 2^2 - 4.2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1;$$

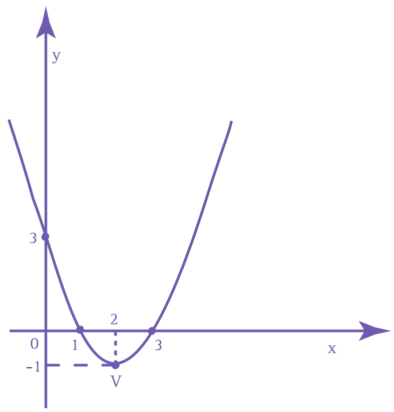
ou,

ii) usar a fórmula $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$:

$$y_V = \frac{-((-4)^2 - 4.1.3)}{4.1} = \frac{-(16 - 12)}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

De qualquer forma, o vértice da parábola será V(2,-1);

►A partir das contas acima, podemos agora esboçar o gráfico da função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$:



►Ao fazer um estudo de sinal da função quadrática, observando o gráfico, constatamos:

a) $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow y \leq 0$, ou seja, para valores de maiores do que ou iguais a 1 ou, menores do que ou iguais a 3, temos que a função assume apenas valores menores do que ou iguais a zero;

b) x<1 ou x>3 $\Rightarrow y > 0$, ou seja, para valores de x menores do que 1 ou, maiores do que 3, temos que a função assume apenas valores positivos.

II Esboce o gráfico e estude o sinal da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

►A função é quadrática, daí, sabemos que seu gráfico é uma parábola. Observando que a = -1, podemos já concluir que sendo a<0, a concavidade dessa parábola é voltada para baixo;

►O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, pois, ela está definida para qualquer número real;

►Vamos encontrar o ponto de interseção da parábola com o eixo y, para isso, basta fazer x = 0 na função e obtemos y = -4;

►Agora, obtendo os zeros da função nós vamos encontrar os pontos de interseção da parábola com o eixo x, vejamos:

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.(-1).(-4)}}{2.(-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{-2} \Rightarrow x' = x'' = 2$$

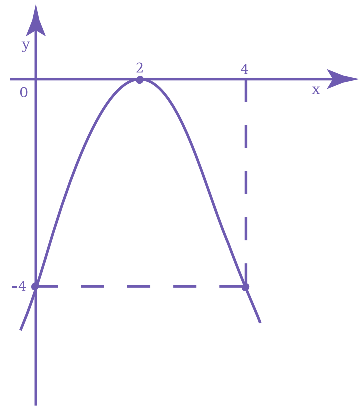
Assim, a parábola admite um único ponto no eixo x que é (2,0);

►Por fim, é importante verificar qual é o vértice da parábola. Nós já sabemos que ele será um ponto de máximo, pelo fato da concavidade ser voltada para baixo. Além disso, considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x, então esse ponto será exatamente o vértice da parábola;

► Se você quiser confirmar, veja: $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$; e, para obter o y do vértice fazemos: $y_V = -2^2 + 4.2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$. Assim, o vértice da parábola será realmente V(2,0);

▶ Para não traçar a parábola apenas com dois pontos, vamos encontrar um outro ponto que pertence à curva, por exemplo, se x = 4, então, substituindo 4 na função, obtemos y = -4, ou seja, o ponto (4,-4) pertence ao gráfico da função dada;

▶ A partir das contas acima, podemos agora esboçar o gráfico da função quadrática $y = -x^2 + 4x - 4$:



▶ Ao fazer um estudo de sinal da função quadrática, observando o gráfico, constatamos que a função $y = -x^2 + 4x - 4$, para qualquer valor de x real, produz sempre $y \leq 0$ Ou seja, essa função não tem imagem positiva para nenhum valor do domínio.

III Esboce o gráfico e estude o sinal da função $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

▶ A função é quadrática, daí, sabemos que seu gráfico é uma parábola. Observando que a = 1, podemos já concluir que sendo a>0, a concavidade dessa parábola é voltada para cima;

▶ O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, pois, ela está definida para qualquer número real;

▶ Vamos encontrar o ponto de interseção da parábola com o eixo y, para isso, basta fazer x = 0 na função e obtemos y = 1;

▶ Agora, obtendo os zeros da função nós vamos encontrar, se existirem, os pontos de interseção da parábola com o eixo x:

$$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.\frac{1}{2}.1}}{2.\frac{1}{2}}$$

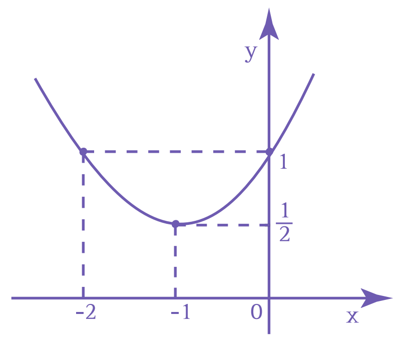
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{1} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{-1} \notin R$$

▶ Assim, como a função não admite zeros já que a equação $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$ não tem solução real, podemos concluir que a parábola não tem pontos no eixo x;

▶ Vamos verificar agora qual é o vértice da parábola? Nós já sabemos que ele será um ponto de mínimo, pelo fato da concavidade ser voltada para cima. Então temos que $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2.\frac{1}{2}} = \frac{-1}{1} = -1$; e , $y_V = \frac{1}{2}.(-1)^2 + (-1) + 1 = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$. Assim, o vértice da parábola será realmente $V\left(-1,\frac{1}{2}\right)$;

▶ Para não traçar a parábola apenas com dois pontos, vamos encontrar um outro ponto que pertence à curva, por exemplo, se x = -2, então, substituindo -2 na função, obtemos y = 1, ou seja, o ponto (-2,1). Logo, o ponto (-2,1) pertence ao gráfico da função dada;

▶ A partir das contas acima, podemos agora esboçar o gráfico da função quadrática $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$:



▶ Ao fazer um estudo de sinal da função quadrática, observando o gráfico, constatamos que a função $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$, para qualquer valor de x real, produz sempre y>0. Ou seja, essa função tem imagem positiva para qualquer valor do domínio. Veja que o gráfico da função está todo acima do eixo-x!

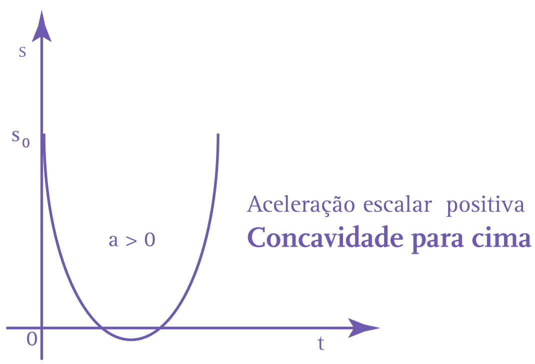
6.3 Aplicações das funções quadráticas na física

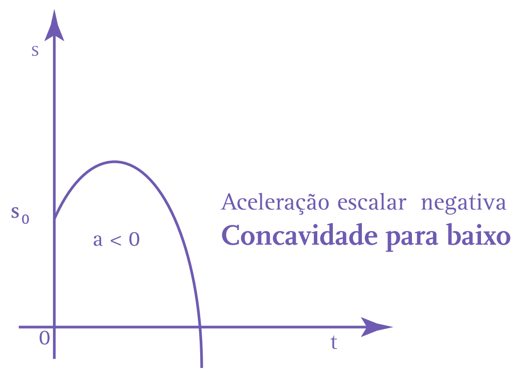
No início deste capítulo mencionamos sobre o movimento uniformemente variado (MUV) e apresentamos a função horária (ou temporal) das posições desse movimento: $s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2$; que é quadrática. É importante evocar também que existe a função horária das velocidades no MUV, que é a função que relaciona o tempo t e a velocidade v correspondente, e, ela é dada por $v = v_0 + \alpha t$, onde v_0 é a velocidade inicial do móvel, α é a aceleração média e ambas são constantes.

Dada uma função horária (ou temporal) das posições de um móvel em MUV, é possível determinar s_0, v_0 e α e também escrever a função horária da velocidade correspondente. Vejamos: seja a função $s = -10 + 5t + 3t^2$, então, fazendo comparação com a função $s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2$, temos que $s_0 = -10m$; $v_0 = 5m/s$ e $\frac{\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = 6m/s^2$ .Daí, a função horária da velocidade será $v = v_0 + \alpha t \Rightarrow v = 5 + 6t$.

É claro que você irá se aprofundar muito mais nesses assuntos, mas, nosso objetivo aqui é mostrar como é necessário conhecer as funções quadráticas.

Já sabemos que a função horária do MUV é quadrática, e daí, o gráfico do espaço s em função do tempo t é uma parábola. A concavidade da parábola determinada pelo sinal da aceleração escalar α. Veja:

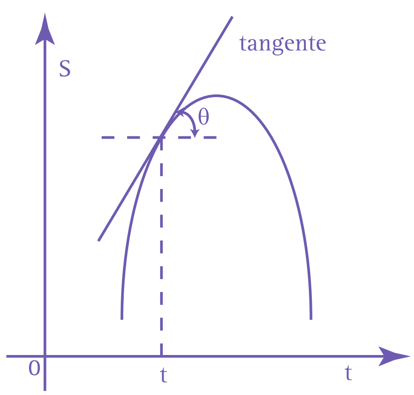




Observando os gráficos acima, perguntamos: qual é o domínio da função horária do MUV: $s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2$?

Como não tem sentido admitirmos tempo negativo, o domínio de qualquer função desse tipo será $D(s) = \{t \in R \ / \ t \geq 0\}$.

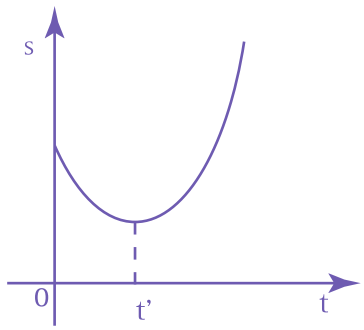
No gráfico do espaço em função do tempo do MUV, é possível demonstrar (com propriedades matemáticas mais avançadas que você estudará na disciplina de Cálculo) que a inclinação da reta tangente à curva de s em cada instante t é exatamente a velocidade do móvel naquele instante. Observe o gráfico abaixo:

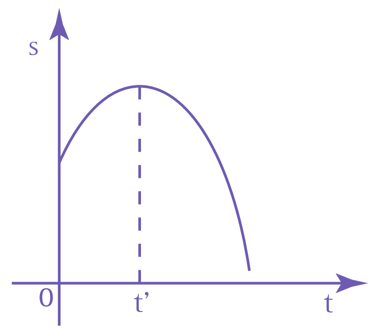


Fique observando o gráfico anterior e imagine a reta tangente à parábola exatamente no vértice dela. Como é que a reta ficará? Concorda que ela estará na posição horizontal, ou seja, paralela ao eixo x? No instante em que isso ocorre, a reta tangente tem inclinação zero.

É isso mesmo! E, nesse caso, como a inclinação da reta tangente à curva representa a velocidade do móvel no instante t, então, isso significa que o vértice da parábola corresponde ao instante em que a velocidade escalar do móvel se anula, isto é, ao instante em que o móvel muda de sentido.

Diz-se que até o instante de mudança de sentido o movimento é retardado; após o instante de mudança de sentido, o movimento é acelerado. Assim, cada um dos gráficos abaixo demonstra que até o instante t', tem-se o movimento retardado e, após o instante t' tem-se o movimento acelerado.





▶*Vamos analisar um exemplo?*

Suponha que um móvel tenha sua trajetória definida pelo MUV segundo a função horária seguinte: $s = t^2 - 3t + 2$.

Considere o gráfico horário desse MUV:

Podemos agora retomar as idéias de construção de uma parábola mencionadas na seção anterior e construir o gráfico dessa função. Vejamos:

▶ O modelo da função horária do MUV é $s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2$. Sendo a função dada quadrática ($s = t^2 - 3t + 2$), sabemos que seu gráfico é uma parábola. Observando que o coeficiente que acompanha t^2 é 1, podemos já concluir que, como $1>0$, a concavidade dessa parábola é voltada para cima;

▶ Vamos encontrar o ponto de interseção da parábola com o eixo y (eixo do espaço s), para isso, basta fazer $t = 0$ na função e obtemos $s = 2$, ou seja, encontramos o ponto (0,2);

▶ Agora, obtendo os zeros da função nós vamos encontrar os pontos de interseção da parábola com o eixo x, vejamos:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t'' = 1 \end{cases}$$

Assim, a parábola cortará o eixo x (eixo do tempo t) nos pontos 1 e 2. As coordenadas de tais pontos são (1,0) e (2,0).

▶ Por fim, vamos verificar qual é o vértice da parábola, sabendo que ele será um ponto de mínimo, pelo fato da concavidade ser voltada para cima. Assim:

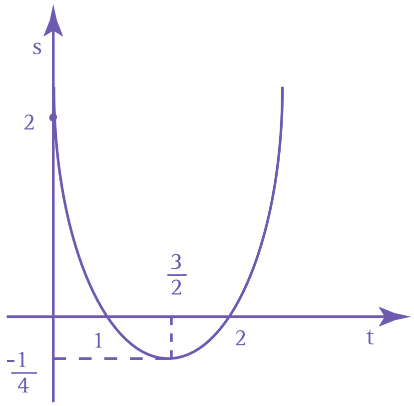
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2.1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Agora, vamos obter o y_V substituindo $x_V = 3/2$ na função $s = t^2 - 3t + 2$:

$$y_V = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3.\frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

Assim, o vértice da parábola será $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

▶A partir das contas acima, podemos agora esboçar o gráfico da função quadrática $s = t^2 - 3t + 2$:



Agora, considere o gráfico anterior, de um MUV, e, analisando os valores indicados nele, podemos tirar algumas conclusões:

*a)*O espaço inicial do móvel é $s_0 = 2m$;
*b)*O móvel muda de sentido no instante t = 3/2s, pois esse instante corresponde ao vértice da parábola e aí, a velocidade escalar do móvel é nula (v = 0). Assim, o movimento é retardado entre os instantes 0 e 3/2s e, acelerado depois do instante 3/2s.
*c)*O móvel passa pela origem (marco zero) nos instantes t'=1s e t''=2s, pois esses instantes correspondem aos pontos em que a parábola intercepta o eixo dos tempos (eixo x).
*d)*A aceleração escalar do móvel é positiva, pois a concavidade da parábola é para cima.
*e)*A velocidade escalar inicial do móvel é negativa, $v_0 = -3m/s$ e, olhando o gráfico, vemos que entre os instantes 0 e 3/2 os espaços decrescem com o tempo.

Atividades Propostas

1| Esboce o gráfico das funções quadráticas a seguir:

$a) y = x^2 - 3x + 2$

$b) y = -x^2 + 7x - 12$

$c) y = x^2 - 2x + 1$

$d) y = x^2 - 5$

$e) y = -x^2 + 3x - 4$

2| Neste capítulo fizemos um estudo sobre o movimento uniformemente variado (MUV) e apresentamos a função horária (ou temporal) das posições desse movimento: $s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$, Temos então que essa função é polinomial do 2º grau, cujo gráfico é uma parábola sendo que a variável s (posição do móvel) depende do tempo t. Nos itens abaixo são dadas algumas características de um movimento uniformemente variado (MUV). Faça um esboço do gráfico da posição de cada móvel em função do tempo, a partir das características mencionadas a seguir:

a) o móvel parte da origem (em t = 0);

b) a aceleração é negativa;

c) o móvel não passa pela origem;

d) o móvel não muda de sentido após sua partida.

3| A função temporal do movimento uniformemente variado de um objeto móvel é $s = 16 + 6t - t^2$, onde s é medido em metros e t em segundos.

a) Qual é o espaço inicial do móvel?

b) O que o valor -1 indica na fórmula da função s?

c) Esboce o gráfico do espaço em função do tempo.

d) O objeto móvel muda de sentido? Quando?

e) Após t = 0, qual é o instante em que o móvel passa pela origem?

f) Qual é a velocidade escalar inicial do objeto móvel?

g) Esboce o gráfico da velocidade em função do tempo indicando o instante de mudança de sentido.

Referências

ALONSO; FINN. ***Física: um curso universitário.*** São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

ANJOS, Ivan Gonçalves dos. ***Física.*** Coleção Horizontes. São Paulo: IBEP.

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antonio de Toledo. ***Física Básica***: volume único. São Paulo: Atual.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.*** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, Samuel. ***Cálculo: funções de uma variável.*** 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.

SILVA JÚNIOR, Geraldo Bull da. ***A função Afim em um estudo interdisciplinar.*** PUC-MJ/UFES.

VERAS, Lília L. ***Matemática aplicada à economia.*** 3. ed. São Paulo: Atlas: 1999.

Capítulo 7

Outros tipos de funções

1 Introdução

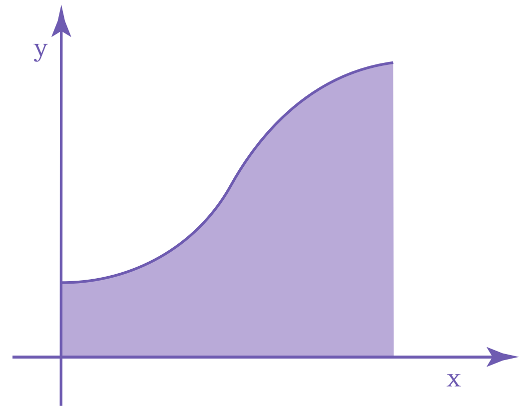
2 Função polinominal

3 Função racional

4 Funções exponencial e logarítmica

5 Atividades propostas

6 Referências



Outros tipos de funções

7.1 Introdução

Este capítulo trata de outras funções, menos comuns, mas não menos importantes do que os tipos de funções já estudados até aqui.

O objetivo deste sétimo capítulo é propiciar a você estudante condições de:

- Estudar outros tipos de funções como as funções polinomial, racional, exponencial e logarítmica;
- Refletir sobre as diversas aplicações dessas funções na vida cotidiana através de exemplos.

Além do estudo deste livro, você não pode deixar de participar das atividades utilizando as ferramentas de Ead em que se pretende discutir em chat sobre as aplicações das funções exponenciais e logarítmicas através de resolução de problemas propostos.

Ao término do estudo deste capítulo você fará sua segunda avaliação (via plataforma) sobre funções lineares, quadráticas, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e terá peso de 2,0 pontos.

Agora, mãos à obra!

7.2 Função polinominal

Definições e observações

Uma função polinomial é a função f: A→R tal que para todo x∈R associa:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde os coeficientes são números reais e n, é inteiro não-negativo.

►Se $a_n \neq 0$, dizemos que a função polinomial dada é de grau n;

►Uma função polinomial de qualquer grau está definida para quaisquer números reais, logo, o domínio de toda função polinomial é o conjunto dos números reais;

►Já foram estudadas as funções lineares e quadráticas que são casos particulares de funções polinomiais para n = 1 e n = 2, respectivamente.

Exemplos

$a) f(x) = x^3$
$b) f(x) = x^4$
$c) f(x) = x^5 - 5x - 6$
$d) f(x) = 3x^6 - 8x + 9$

Nos exemplos acima, as funções dos itens a, b, c e d são, respectivamente, polinomiais do 3º, 4º, 5º e 6º graus.

Exemplifique agora você funções polinomiais de graus maiores!

No caso de algumas funções que são usadas na Física, podemos elencar as seguintes funções polinomiais:

a) $s = s_0 + vt \rightarrow$ a função horária das posições do movimento uniforme é uma função polinomial do 1º grau em função do tempo t;

b) $v = v_0 + \alpha t \rightarrow$ a função horária das velocidades do movimento uniformemente variado é uma função polinomial do 1º grau em função do tempo t;

c) $s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2 \rightarrow$ a função horária das posições do movimento uniformemente variado é uma função polinomial do 2º grau em função do tempo t;

d) $\varphi = \varphi_0 + \omega.t \rightarrow$ a função horária angular do movimento circular uniforme é uma função polinomial do 1º grau em função do tempo t, onde φ_0 é a posição angular inicial e ω é a velocidade angular (sendo que φ_0 e ω são constantes);

É importante lembrar que quando estamos tratando dessas funções horárias do campo da Física, o domínio de cada uma delas, ou seja, conjunto dos valores para os quais tais funções estão definidas é $\{t \in R / t \geq 0\}$.

7.3 Função racional

Definições e observações

Seja a função f: A$\rightarrow$R. Uma função é dita racional quando a todo x $\in$ R associa: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P(x) e Q(x) são dois polinômios, sendo Q(x) não-nulo.

Como analisamos o domínio das funções racionais?

Como as funções polinomiais estão definidas para quaisquer valores reais de x, temos que a única restrição para as funções racionais será para o "denominador Q(x)", assim, D(f) = $\{x \in R \ / \ Q(x) \neq 0\}$.

Exemplos

$a) f(x) = \frac{1}{x}$

$b) f(x) = \frac{x}{x-2}$

$c) f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 - 2x + 7}$

As funções acima são exemplos de funções racionais.

Na Física você estudará sobre "Campo Gravitacional" e esse assunto contempla funções racionais. Vejamos como são essas funções?

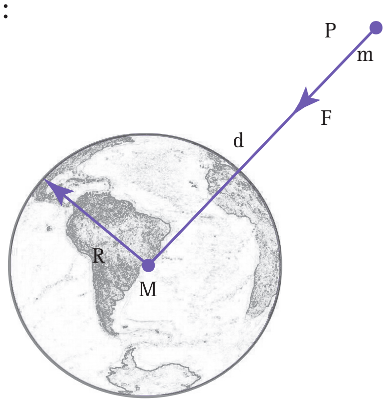
Neste contexto, estamos apenas interessados em mostrar para você que funções racionais são utilizadas na Física. É importante então que conheça tais definições, sem maior aprofundamento. Haverá o momento certo para isso no seu curso!

▶ *Mas, o que é mesmo "campo gravitacional"?*

Conforme FERRARO (Capítulo 14), campo gravitacional é toda região do espaço na qual, colocando-se uma partícula em qualquer um de seus pontos, esta fica sujeita a uma força de atração gravitacional.

Os corpos materiais originam campos gravitacionais no espaço que os cerca. A Terra, como qualquer corpo material, origina no espaço que a envolve um campo gravitacional: *o campo gravitacional terrestre*.

Observe a figura abaixo:



Uma partícula de massa **m** colocada num ponto P deste campo fica sujeita a uma força de atração gravitacional, dada pela Lei da Gravitação Universal. Considerando a Terra esférica e homogênea de massa **M** e raio **R** e sendo **d** a distância da partícula de massa **m** ao centro da Terra, resulta:

$F = G\frac{M.m}{d^2}$ ou melhor $F = GMm\frac{1}{d^2}$

Esta é uma função racional que fornece a força **F** de atração gravitacional em função da distância **d** da partícula ao centro da Terra (observe que G, M e m são constantes, pois G é a constante de gravitação universal, M é a massa da Terra e m é a massa da partícula).

Você precisa entender que o "numerador" dessa função racional é apenas uma constante (pois é o produto de valores constantes) e, o "denominador" é um polinômio de segundo grau: d^1.

Existe também a energia potencial gravitacional que a partícula de massa **m** adquire ao ser colocada em P, em relação a um referencial no infinito. Essa energia é dada pela fórmula:

$E_p = -G\dfrac{Mm}{d}$, ou melhor, $E_p = -GMm\dfrac{1}{d}$

Observe que, de modo análogo ao exemplo anterior, esta fórmula também é uma função racional. Só que agora, a função que fornece a energia potencial gravitacional é tal que o "numerador" é apenas uma constante e o "denominador" é um polinômio de primeiro grau: d.

Outro exemplo da Física que se utiliza da idéia de função racional surge no estudo sobre Campos Elétricos (que você estudará mais profundamente no decorrer do seu curso!). Observe a função:

$$E = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}$$

Ela nos fornece o módulo do campo elétrico **E** num ponto qualquer distando **r** da carga puntiforme q, sendo que q, π e ε_0 são constantes. Esse também é um exemplo de função racional.

7.4 Funções exponencial e logarítmica

Conforme Nery e Trotta[1] (2001, p. 162),

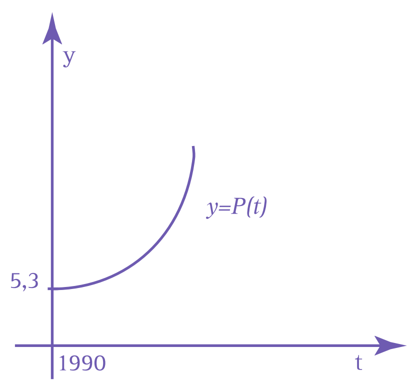
> *As ferramentas matemáticas costumam extrapolar os fatos que lhes deram origem. As funções exponenciais, por exemplo, que surgiram na época das grandes navegações para serem aplicadas em transações financeiras, estão ligadas a importantes fatos da natureza, como o crescimento de uma população de vírus ou a meia-vida de uma substância radiativa.*

Esta seção foi escrita com base na referência:
HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.*** (Trad. por Ronaldo Sergio de Biasi). Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Funções Exponenciais

Antes de apresentar o conceito de Função Exponencial vejamos um exemplo sobre crescimento populacional que pode ser expresso a partir desse tipo de função.

Em 1990, a população mundial era de 5,292 bilhões de habitantes e estava aumentando a uma taxa anual constante a ordem de 2%. Se essa tendência continuasse, o aumento da população mundial seria representado pela curva abaixo (dito crescimento exponencial):



A curva desenhada é o gráfico da função exponencial P(t), onde a = 1,0202, $P_0 = 5{,}3$ (em bilhões) é a população estimada em 1990, e P é a população estimada em t anos (o nome "função exponencial" está relacionado com a variável independente, que é justamente um expoente), assim a função "exponencial" fica $P(t) = 5{,}3 \cdot 1{,}0202^t$.

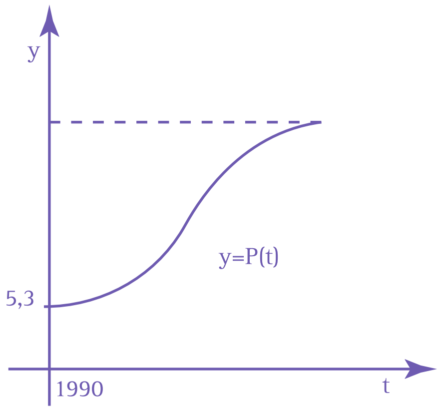
Observe o gráfico e perceba que embora a taxa de variação percentual da função população P(t) seja constante, a função P(t) aumenta muito rapidamente com o tempo. Dessa forma, para o ano de 2100, a previsão para o número de habitantes do mundo seria de quase 48 bilhões. De fato, para fazer essa estimativa, basta substituirmos t por 110, pois se em 1990 o valor de t = 0, então, em 2100, o valor de t será 110, assim: P(t) em 2100 = $P(110) = 5{,}3 . 1{,}0202^{110} \approx 48$, ou seja, aproximadamente 48 bilhões. Um valor altíssimo!

Esse modelo que apresenta aumento da população é conhecido como modelo malthusiano em homenagem a um economista inglês chamado Thomas Malthus (1766-1834) que usou tal forma para justificar a tese de que as populações tendem a aumentar mais rapidamente que a oferta de alimentos.

---

[1] NERY, Chico; TROTTA, Fernando. Matemática para o ensino médio. Volume único. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

Mas, existem alternativas para o modelo de Malthus! Por exemplo, há um modelo chamado logístico, apresentado no gráfico abaixo, no qual, a partir de certo ponto, o aumento da população é "freado" pelas condições ambientais. Observe:



E você? O que acha? Qual das duas curvas você considera um modelo mais realista do aumento da população mundial?

Faça uma reflexão!

Assim como o modelo malthusiano, o modelo logístico pode ser descrito em termos de funções exponenciais, que têm inúmeras outras aplicações. Por exemplo, as funções exponenciais também são usadas nas finanças, para calcular o retorno dos investimentos, na arqueologia, para datar artefatos antigos, na psicologia, para estudar o aprendizado, na saúde pública, para analisar a disseminação de doenças, e na indústria, para estimar a confiabilidade dos produtos.

Antes de apresentar a função exponencial, vamos exibir uma pequena revisão das propriedades envolvendo expoentes, que são necessárias no estudo de tal função:

Definição de a^n para valores racionais de n (e a>0)

a) Potências inteiras: se n é um número inteiro positivo $\rightarrow a^n = \underbrace{a.a...a}_{nFATORES}$;

b) Potências fracionárias: se m e n são números inteiros positivos $\rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, onde $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ é dita raiz n-ésima (leia "enésima") de a;

c) Potência nula: $a^0 = 1$;

d) Potências negativas: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Por que essas convenções acima?

Costuma-se justificá-las pelas próprias propriedades das potências. Por exemplo, porque $a^0 = 1$?

Se assumirmos válida a propriedade que na divisão de potências de bases iguais repete-se a base e, subtraem-se os expoentes podemos fazer o seguinte:

Para o item c, suponha n um número inteiro qualquer, daí:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Para o item d, observe a igualdade abaixo:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Vamos ver alguns exemplos:

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8}$$

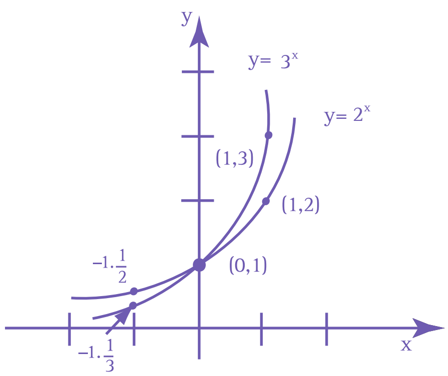
$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

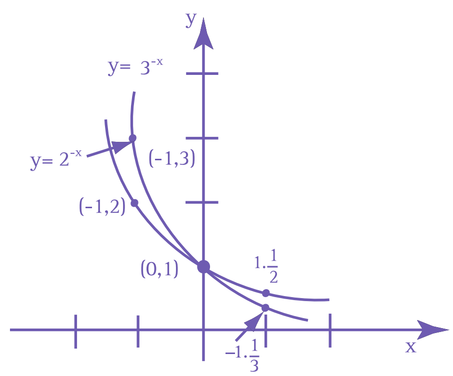
Definições e observações

Seja a um número real positivo e diferente de 1 ($a>0$, $a \neq 1$). Consideremos, então, a função f de R em R tal que, para todo $x \in R$, temos $f(x) = a^x$. Ela é dita de **função exponencial de base a.**

Temos abaixo o gráfico de quatro funções exponenciais que foram esboçados a partir de alguns pontos, a saber:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y = 3^x \\ y = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \end{cases}$$

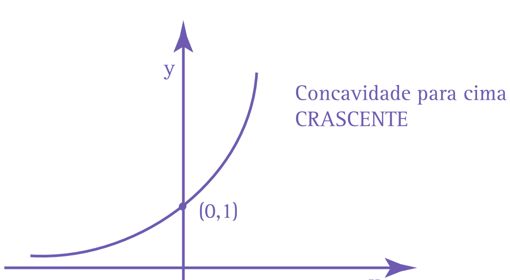




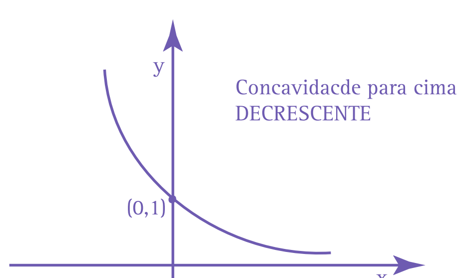
As quatro curvas acima são típicas dos gráficos de funções exponenciais. Algumas características especiais dessas curvas:

- ► Se a > 1, o gráfico de $f(x) = a^x$ é semelhante aos gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$;
- ► Se 0 < a < 1, o gráfico de $f(x) = a^x$ é semelhante aos gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$

Esses dois casos são representados na figura a seguir:



(a) Gráfico de $y=b^x$ para b>1



(b) Gráfico de $y=b^x$ para 0<b<1

É importante neste momento que você recorde de algumas propriedades básicas das funções exponenciais, quais sejam:

Dadas as bases a e b (a > 0 e b > 0) e os números reais x e y, temos:

a) Regra da igualdade: $b^x = b^y$ se e apenas se $x = y$;

b) Regra do produto: $b^x . b^y = b^{x+y}$;

c) Regra do quociente: $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$;

d) Regra da potência: $(b^x)^y = b^{x.y}$;

e) Regra da multiplicação: $(a.b)^x = a^x . b^x$;

f) Regra da divisão: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Vamos ver agora alguns exemplos? $4^2 . 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

$$\frac{4^2}{4^3} = 4^{2-3} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(3^2\right)^3 = 3^{2.3} = 3^6 = 729$$

$$3^{\frac{1}{3}} . 9^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3} = \frac{125}{343}$$

Generalizando: Modelo de Crescimento Exponencial

Consideramos uma grandeza qualquer V que varia em função do tempo.

Suponhamos que o valor dessa grandeza no instante 0 seja V_0 e nos instantes 1, 2, ...,n, os valores sejam V_1, V_2, ..., V_n; suponhamos ainda que os valores dessa grandeza cresçam a uma taxa constante k por unidade de tempo. Assim, o valor da grandeza no instante n é função exponencial de n (dados o valor da grandeza no instante zero e k) e é dado pela fórmula: $V_n = V_0 \ (1 + k)^n$. Observe o quadro abaixo e acompanhe como acontece esse crescimento exponencial:

Instante	Espaço - s (em metros)
0	V_0
1	$V_1 = V_0 + V_0k = V_0(1+k)$
2	$V_2 = V_1 + V_1k = V_0(1+k) + V_0(1+k)k = V_0(1+k)(1+k) = V_0(1+k)^2$
3	$V_3 = V_2 + V_2k = V_0(1+k)^2 + V_0(1+k)^2k = V_0(1+k)^2(1+k) = V_0(1+k)^3$
...	...
n	$V_n = V_0(1+k)^n$

É importante mencionar neste momento que é muito interessante você utilizar uma calculadora científica para resolver os problemas que envolvem as funções exponenciais! Peça ajuda ao tutor nos passos que são efetuados para encontrar as soluções dos problemas!

I O número de habitantes de uma cidade hoje é 40.000. Estima-se que esse valor cresce exponencialmente a uma taxa de 2% ao ano. Qual será o número de habitantes daqui a 2 anos? E daqui a 10 anos?

Assumindo a fórmula da função exponencial $V_n = V(n) = V_0(1+k)^n$, e, sabendo que a taxa de crescimento é de 2% = 2/100 = 0,02 e que V_0 = 40.000 podemos estimar o número de habitantes:

- daqui a 2 anos: $V(2) = 40.000 \ .\ 1{,}02^2 = 41.616$ habitantes
- daqui a 10 anos: $V(10) = 40.000 \ .\ 1{,}02^{10} = 48.760$ habitantes

II O Produto Interno Bruto (PIB) de certo país, este ano, é de 600 bilhões de dólares. Estima-se que esse valor cresce à taxa de 5% ao ano. Estime o PIB daqui a 5 anos?

Assumindo a fórmula da função exponencial $V_n = V(n) = V_0.(1+k)^n$, e, sabendo que a taxa de crescimento é de 5% = 0,05 e que $V_\theta = 600$ (em bilhões de dólares) podemos estimar o PIB daqui 5 anos fazendo:

$V(5) = 600.(1 + 0{,}05)^5 = 600 \ .\ 1{,}05^5 \sim 765{,}77$ bilhões de dólares

III Uma aplicação, em certa Instituição Financeira, rende juros compostos de 1,98% ao mês. Se forem depositados hoje, R$5.000,00, qual será o montante obtido daqui um ano?

Neste problema, o valor inicial é o capital inicial aplicado, no caso, 5.000 reais, e a taxa é a que faz o capital render juros de 1,98% ao mês. Desse modo, queremos calcular o valor total (montante) após um ano rendendo juros (ou seja, 12 meses, já que a taxa fornecida é mensal), então:

$V(12) = 5.000 \ .\ (1 + 0{,}0198)^{12} = 5.000 \ .\ 1{,}0198^{12} = 6.326{,}30$ reais

Esse comportamento que a função assume na área de finanças é típico do regime de Juros Compostos, comumente denominado de “juros sobre juros”. Com efeito, o cálculo dos juros sempre se refere ao montante anterior e não ao capital inicial como é no regime de Juros Simples.

IV Um capital de R$1.000,00 é aplicado a juros compostos durante 4 meses produzindo um montante de R$1.360,49. Qual a taxa mensal de juros?

Observe que neste problema são fornecidos V_0 = 1.000, V(4) = 1.360,49 e n = 4 meses, daí, substituindo na fórmula $V(n) = V_0.(1+k)^n$ obtemos:

$$1.000.(1+k)^4 = 1.360{,}49$$

$$(1+k)^4 = \frac{1.360{,}49}{1.000}$$

$$1+k = \sqrt[4]{1{,}36049}$$

$$k = \sqrt[4]{1{,}36049} - 1$$

$$k = 0{,}08 \Rightarrow k = \frac{8}{100} \Rightarrow k = 8\%$$

Portanto, a taxa mensal de juros que faz com que 1.000 reais produza, no regime de Juros Compostos, um montante de 1.360,49 em 4 meses é 8% ao mês.

Funções Logarítmicas

Aproveitando os exemplos anteriores, vamos apresentar uma situação-problema:

Pense numa instituição financeira que paga juros compostos de 0,9% ao mês em certo tipo de aplicação. Pergunta-se: quanto tempo deve deixar um capital de R$500,00 aplicado para obter um montante de R$527,61?

Usando a idéia do crescimento exponencial dos juros compostos devemos usar a fórmula $V(n) = V_0(1+k)^n$ e encontrarmos o valor de n!

Como é que fica a fórmula acima com os valores dados já substituídos?

$$500(1+0,009)^n = 527,61$$

$$1,009^n = \frac{527,61}{500}$$

$$1,009^n = 1,05522$$

E agora? Precisamos encontrar o valor de n tal que a equação acima seja satisfeita! Isso nem sempre é tarefa tão fácil nem imediata se não conhecermos os logaritmos!

Vamos pensar no seguinte exemplo:

Se tivermos de resolver a equação $2^x = 16$, como devemos proceder?

Ora, temos que encontrar o valor da incógnita certo? Isto é equivalente a determinar o valor do expoente x tal que "2 elevado a x dê 16". Mas $16 = 2^4$, então podemos resolver a equação assim:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

Então, x = 4 porque "2 elevado ao expoente 4 é igual a 16".

Se você comparar a equação do primeiro exemplo $1,009^n = 1,05522$ com a equação $2^x = 16$, observe que a primeira é muito mais difícil de ser resolvida do que a segunda. A compreensão do conceito de logaritmos nos auxilia na resolução de equações como essas, em que a incógnita é expoente!

O autor STRUIK (1992)[1] comenta sobre a invenção dos logaritmos em que vários matemáticos do século XVI confrontaram-se com a possibilidade de coordenar progressões aritméticas e geométricas (que são seqüências de números com certas propriedades especiais), principalmente no que se refere a facilitar o trabalho com as complicadas tabelas de funções trigonométricas. Assim, um proprietário de terras escocês, John Napier (ou Neper), em 1614 publicou uma obra chamada *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* cuja idéia principal foi construir duas sucessões de números de tal modo relacionadas, que, quando uma crescesse em progressão aritmética, a outra decrescesse em progressão geométrica. A idéia de Napier, com tal sistema, era facilitar o cálculo dos senos (funções trigonométricas), mas esse processo não agradou posteriormente ao próprio Napier, pois utilizava nos seus cálculos uma função mais complexa, do tipo $y = a.e^{-\frac{x}{a}}$, na qual $a = 10^7$. Assim, após mais estudos de outros autores, eles decidiram por adotar a função $y = 10^x$ que facilitou em muito a construção de tabelas contendo logaritmos.

Definições e observações

Chamamos **logaritmo do número N**, na base b, o número x tal que $N = b^x$, sendo N e b números reais positivos e, $b \neq 1$. Indica-se $\log_b N = x$, donde temos: $\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$

[1] Para saber mais, leia: STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas.** (Trad. por João Cosme Santos Guerreiro). 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

Vamos calcular o valor dos logaritmos abaixo a partir da definição dada:

$a) \log_2 512$

$b) \log_{125} 5$

$c) \log_{16} \frac{1}{2}$

$d) \log_3 \sqrt{243}$

Observe que em cada caso temos que calcular o valor do logaritmo levando em conta bases diferentes:

$a) \log_2 512 = x \Rightarrow 2^x = 512 \Rightarrow 2^x = 2^9 \Rightarrow x = 9$

$b) \log_{125} 5 = x \Rightarrow 125^x = 5 \Rightarrow \left(5^3\right)^x = 5^1 \Rightarrow 5^{3x} = 5^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$c) \log_{16} \frac{1}{2} = x \Rightarrow 16^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{-1} \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$d) \log_3 \sqrt{243} = x \Rightarrow 3^x = \sqrt{243} \Rightarrow 3^x = 243^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^x = \left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Durante muitos séculos, matemáticos e profissionais de outras áreas adotavam tabelas extensas de logaritmos, que caíram em desuso com o aparecimento das calculadoras eletrônicas e computadores. Em particular, com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral (disciplinas que você estudará!), a partir do século XVII, percebeu-se aos poucos o grande âmbito de aplicações que os logaritmos dão conta! Como já comentamos anteriormente, John Napier foi quem fez um amplo estudo sobre essa área e é a ele que devemos a expressão logaritmos neperianos ou naturais, onde a base considerada para o cálculo dos logaritmos é a base e, que representa um dos números irracionais mais freqüentes nas mais diversas aplicações dentro e fora da Matemática, cuja aproximação com duas casas decimais vale 2,71.

A utilização da base 10 é muito comum, por isso, normalmente não se escreve $\log_{10}$N, costuma-se então omitir a base 10 e escrever apenas logN. Assim como quando se utiliza a base e, ao invés de se escrever $\log_e$ N, denota-se lnN, "ln" significando logaritmo natural.

Os logaritmos têm as seguintes propriedades:

$I) \log_b (M.N) = \log_b M + \log_b N$

$II) \log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

$III) \log_b N^\alpha = \alpha . \log_b N$

$IV) \log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$

Sendo que denotamos por:
I – Logaritmo do Produto
II – Logaritmo do Quociente
III – Logaritmo da Potência
IV – Mudança de Base

Vamos ver porque essas propriedades funcionam?

Primeiro observe que se $\log_b b^y = x \Rightarrow b^x = b^y \Rightarrow x = y$. Agora veja que se $x = b^{\log_b N}$, então $x = N$. Com efeito, segundo a definição anterior, podemos escrever $\log_b x = \log_b N \Rightarrow x = N$.

Para entendermos o porquê da validade da propriedade I (Logaritmo do Produto), vamos usar a definição. Para provar tal propriedade precisamos demonstrar que $b^{\log_b M + \log_b N} = M.N$. De fato,

$$b^{\log_b M + \log_b N} = b^{\log_b M}.b^{\log_b N} = M.N$$

Para demonstrar a propriedade II (Logaritmo do Quociente) basta fazer de modo análogo ao feito na propriedade I. Tente você fazer! Peça ajuda se necessário, ao seu tutor!

A propriedade III (Propriedade da Potência): $\log_b N^\alpha = \alpha.\log_b N$ pode ser demonstrada também usando a definição de logaritmo. Podemos verificar que $b^{\alpha.\log_b N} = (b^{\log_b N})^\alpha = N^\alpha$ e assim mostramos que $\log_b N^\alpha = \alpha.\log_b N$.

Deixaremos como tarefa para você verificar porque a propriedade IV de mudança de base funciona.

Essa propriedade de mudança de base é muito útil quando precisamos calcular logaritmos de outras bases sendo possível utilizarmos as calculadoras científicas, já que elas possuem teclas que nos permitem calcular logaritmos na base 10 e e. Se tivermos que calcular $\log_4 5$ e pudermos usar uma calculadora científica, podemos usar a propriedade IV e transformarmos tal logaritmo para a base 10. Utilizando a propriedade obtemos: $\log_4 5 = \dfrac{\log 5}{\log 4}$.

O objetivo aqui é você perceber que as propriedades dos logaritmos são úteis e não "memorizá-las". Você deve ter notado que essas propriedades decorrem da definição e do que sabemos sobre as propriedades fundamentais de potências.

Agora, sabendo dessas propriedades, como resolver uma equação como a seguinte: $5^x = 11$?

Pela definição sabemos que $x = \log_5 11$ e usando mudança de base: $x = \dfrac{\log 11}{\log 5}$. Ou também podemos aplicar logaritmo na base 10 ambos os membros da igualdade e chegarmos ao mesmo resultado, veja:

$$\log 5^x = \log 11 \Rightarrow x.\log 5 = \log 11 \Rightarrow x = \frac{\log 11}{\log 5}$$

Definições e observações[2]

Seja b um número real positivo e diferente de 1. Consideramos, então, a função f de R_+^* em R tal que, para todo $x \in R_+^*$, temos $f(x) = \log_b x$. Ela é dita **função logarítmica de base b.**

Como você pode observar, a definição da função logarítmica faz a exigência da base b ser um número real positivo e alem disso, diferente de 1. Será por quê?

Ora, se b = 1, seria impossível resolver $\log_1 N=x$ quando $N \neq 1$! De fato, $1^x = 1$ para todo valor de x.

E se b < 0?

Por exemplo, é possível calcular $\log_{-2}{}^4$? Se for, temos que achar um número x tal que $(-2)^x = 4$, e, nesse caso, x = 2. Mas, e $\log_{-2}{}^8$? Para isso precisamos encontrar um x tal que (-2)x=8, mas, $(-2)^3 = -8$ e não 8. Logo, pode-se perceber que temos problemas ao trabalharmos com a definição de logaritmos com base negativa. Por isso, o domínio da função $f(x) = \log_b x$ é restringido para valores em que ela está bem definida!

Vamos agora analisar como é o comportamento do gráfico de uma função logarítmica?

Vejamos os gráficos das funções $\begin{cases} f(x) = \log_2 x \\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$

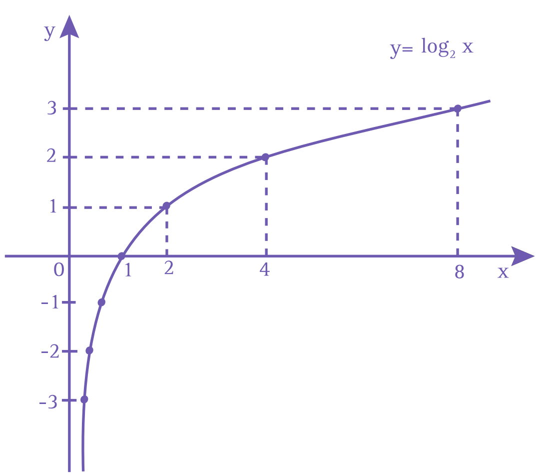
[2] Nesta definição utilizamos o símbolo   que significa o conjunto dos números reais positivos (+) com exceção do zero (*).

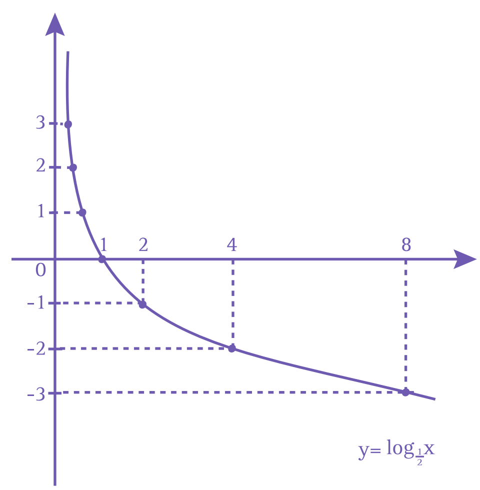
Para traçá-los, observemos algumas imagens fornecidas por tais funções nas tabelas abaixo:

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

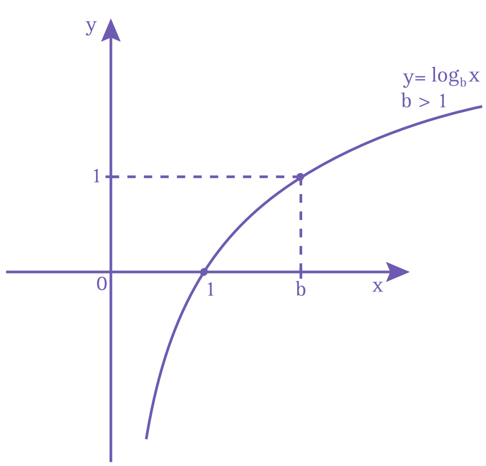
x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

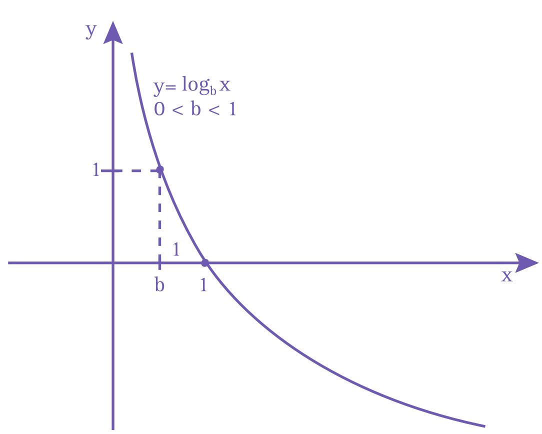
Fazendo agora o esboço dos gráficos a partir dos pontos encontrados nas tabelas acima, obtemos as curvas seguintes:





De um modo geral, assim como os gráficos das funções exponenciais, os das funções logarítmicas também apresentam um comportamento típico, observe:





Definições e observações

A partir da observação dos gráficos das funções logarítmicas destacamos:

► O gráfico da função $f(x) = \log_b x$ sempre corta o eixo-x (das abscissas) no ponto (1,0), pois fazendo x = 1, ou seja, $\log_b 1 = y$ Aí temos que $b^y = 1$ e, portanto, y = 0 para qualquer base b;

► O gráfico da função $f(x) = \log_b x$ sempre passa pelo ponto (b,1). Com efeito, fazendo x = b temos que $\log_b b = y$, logo, $b^y = b$, e, isso significa que y = 1;

► O gráfico da função logarítmica nunca toca o eixo-y (das ordenadas);

► O conjunto imagem da função logarítmica é o conjunto dos números reais.

Atividades Resolvidas

I Determine em quantos semestres um empréstimo de R$11.000,00 tomado por Álvaro pode ser quitado em único pagamento de R$22.125,00, sabendo que a taxa é de 15% ao semestre em regime de juro composto.

Como já mencionamos anteriormente, a função que se aplica ao crescimento dos juros no regime de capitalização composta é do tipo exponencial: $V(n) = V_0.(1+k)^n$. Então, conforme os dados do problema temos que encontrar o valor de n:

$$11.000(1+0,15)^n = 22.125 \Rightarrow 1,15^n = \frac{22.125}{11.000} \Rightarrow 1,15^n = 2,0114$$

Agora, recorrendo às propriedades dos logaritmos, resolvemos essa equação aplicando log em ambos os membros da igualdade:

$$\log 1,15^n = \log 2,0114 \Rightarrow n \log 1,15 = \log 2,0114 \Rightarrow n = \frac{\log 2,0114}{\log 1,15} \Rightarrow n = 5 semestres$$

Para resolver os logaritmos acima faça uso de uma calculadora científica. Peça ajuda ao tutor para aprender os passos para resolver o problema!

II O número de habitantes de certa cidade é hoje 7.000, e cresce à taxa de 3% ao ano.
a) Qual será o número de habitantes daqui a 8 anos?
b) Qual será o número de habitantes daqui a 30 anos?
c) Daqui a quanto tempo (aproximadamente) a população dobrará?
(Considere que log 2 = 0,3010 e log 1,03 = 0,0128).

Supondo o comportamento da função que determina o crescimento populacional em função do tempo como o da função exponencial $V(n) = V_0.(1+k)^n$, observe que o valor inicial V_0 é dado por 7.000 e que a taxa de crescimento anual é 3% ou 0,03. Assim, vamos calcular:

a) O número de habitantes daqui a 8 anos:

$$7.000.(1+0,03)^8 = 7.000.1,03^8 \approx 8.867$$

b) O número de habitantes daqui a 30 anos:

$$7.000.(1+0,03)^{30} \approx 16.990$$

c) Quanto tempo será necessário para que a população dobre, isto é, atinja a marca de 14.000 habitantes:

$$7.000.1,03^n = 14.000 \Rightarrow 1,03^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,03} \Rightarrow n \approx 23,45 \text{ anos.}$$

1| Diga se cada uma das funções a seguir é polinomial ou racional:

a) $f(x) = 2x^3 + 4x$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^6}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^6 + 5x^5}$

d) $h(x) = 2x^7 - \sqrt{2}x - 4$

e) $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^5 + 5x - 1}$

2| Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $5^x = 5^{15}$

b) $6^x = 1296$

c) $343^x = 7$

d) $\left(\dfrac{1}{243}\right)^x = 3$

e) $\pi^{2x} = 1$

f) $4^x = 0$

g) $8^x = -1$

h) $1^x = 1^{45}$

3| Resolva as equações exponenciais:

a) $10^{2x-6} = 1$

b) $6^{x^2-5x+2} = 1$

4| Resolva as equações exponenciais utilizando uma substituição de variáveis:

a) $(2^x)^2 - 6.2^x + 15 = 0$

b) $9^x - 5.3^x + 9 = 0$

5| Certo tipo de aplicação financeira, em juros compostos, triplica o capital em 15 meses.

a) Qual é a taxa mensal de juros cobrada?

b) Em quantos meses a aplicação renderá 300% de juros?

7| [3] A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que va-

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{E}{E_0}$$

ria de I = 0 até I = 8,9 para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:
Onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7.10^{-3}$kWh.

*a)*Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 5 na escala Richter?

*b)*Se a energia liberada em um determinado terremoto foi de 5.103kWh, qual a intensidade correspondente na escala Richter?

Utilizando o modelo $V(n) = V_0(1+k)^n$ que representa o crescimento de uma função exponencial, resolva os três problemas abaixo que tratam do regime de capitalização composta:

8| Determine o prazo de uma aplicação de R$40.000,00 à taxa de 9,74% ao quadrimestre, realizada por Maria que produz um montante de R$43.894,63.

9| Uma loja financia um eletrodoméstico, no valor de R$320,00, sem entrada, ou em uma única prestação de R$404,90 a prazo, segundo a taxa de 4% ao mês. Kaleb deseja saber qual é o período para pagamento do eletrodoméstico a prazo.

10| Vanda efetua em certa data uma aplicação de R$22.000,00. Ela produz, à taxa de juros compostos de 2,4% ao mês, um montante de R$26.596,40 em certa data futura. Calcule o prazo (em meses) da operação.

[3] Esta questão é de um vestibular da FUVEST/SP e foi adaptada da referência: NERY, Chico; TROTTA, Fernando. Matemática para o ensino médio. Volume único. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

ALONSO; FINN. ***Física: um curso universitário***. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

ANJOS, Ivan Gonçalves dos. ***Física***. Coleção Horizontes. São Paulo: IBEP.

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antonio de Toledo. ***Física Básica:*** volume único. São Paulo: Atual.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações***. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, Samuel. ***Cálculo: funções de uma variável***. 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.
VERAS, Lília L. ***Matemática aplicada à economia***. 3. ed. São Paulo: Atlas: 1999.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. ***Matemática para o ensino médio***. Volume único. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

Capítulo 8

Definições importantes acerca de funções

1 Introdução

2 Funções compostas

3 Função par e função ímpar

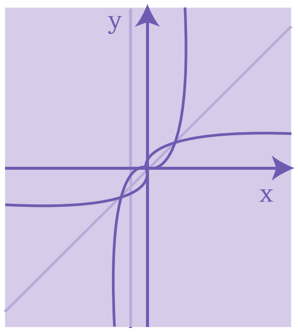
4 Função crescente e função decrescente

5 Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

6 Função inversa

7 Atividades propostas

8 Referências



Definições importantes acerca de funções

8.1 Introdução

Fazendo uma retrospectiva sobre o conceito de função, podemos relembrar que uma **função** f (real de variável real) é uma regra (lei ou critério) que diz como associar a cada elemento x do conjunto domínio A (subconjunto dos números reais) um único elemento y do conjunto R (dos números reais), onde denotamos por $f: A \rightarrow R$ e expressamos por $y = f(x)$.

Por exemplo, se tomarmos a função $f: R \rightarrow R$ onde $f(x) = x + 2$, temos que tal função tem a lei que associa a cada elemento x do conjunto dos números reais, um único número real y, onde y é igual ao elemento x somado de duas unidades.

Podemos observar da função acima que seu domínio é o conjunto dos números reais (já que $y = x + 2$ está definida para qualquer valor de x), e, o conjunto imagem também é o conjunto dos números reais.

Para finalizar os estudos nesta disciplina vamos apresentar algumas definições muito importantes que envolvem as funções.

O objetivo deste oitavo capítulo é propiciar a você estudante condições de:
- ▶ Compreender as definições sobre as diversas classificações existentes para as funções;
- ▶ Saber identificar cada um dos tipos de funções elencados nos subtemas.

Além do estudo deste material impresso, você não pode deixar de participar das atividades utilizando as ferramentas de Ead em que se pretende abrir fóruns de debates para discutir as resoluções das atividades propostas no livro que foram mais complexas ou geraram mais dúvidas para você.

A última semana do curso será reservada para estudo e revisão de todos os conteúdos que você estudou nesta disciplina de Pré-Cálculo. Sendo assim, vamos propor um chat “Plantão de Dúvidas” sobre todos os conteúdos estudados na disciplina e também realizaremos as nossas últimas avaliações, quais sejam:

▶ 3ª Avaliação (escrita) sobre funções compostas, par, ímpar, crescente, decrescente, sobrejetoras, injetoras, bijetoras e Inversas (Peso: 1,0 ponto);

▶ 4ª Avaliação (via plataforma) sobre todos os conteúdos estudados na disciplina (Peso: 5,0 pontos).

8.2 Funções compostas

A primeira definição refere-se às **Funções Compostas**. Vamos analisar um exemplo[1] para entendermos melhor tal definição:

Os ambientalistas estimam que em certa cidade a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia será dada pela função c(p) = 0,5p + 1 partes por milhão quando sua população for de p mil habitantes. Um estudo demográfico indica que a população da cidade dentro de t anos será $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ mil habitantes.

Pede-se:

a) A concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia em função do tempo.
b) Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido de carbono atingirá o valor de 6,8 partes por milhão.

Observe que o problema envolve duas funções, a saber:

- uma da concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia c (em partes por milhão) em função da quantidade p (em milhares) de habitantes na cidade;
- outra que indica a população p (em milhares) da cidade em função do tempo t (em anos).

Essas duas funções estão relacionadas, pois com o passar do tempo, o número de habitantes da cidade varia, e, conseqüentemente, também varia a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia!

O item a do problema pede que construamos a função que relaciona a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia em função do tempo. Para isso vamos ter que fazer uma "**Composição das Funções c(p) e p(t)**".

Como a concentração de monóxido de carbono está relacionada à variável p através da equação c(p) = 0,5p + 1 e a variável p está relacionada à variável t através da equação $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ obtemos a função composta c = f(t) encarando a função p(t) como a variável independente. Observe;

$$c(p) = 0{,}5p + 1 \Rightarrow$$

$$c(p(t)) = c(10 + 0{,}1t^2) = 0{,}5(10 + 0{,}1.t^2) + 1 = 5 + 0{,}05t^2 + 1 = 0{,}05t^2 + 6$$

E assim, a função composta $c(p(t)) = 0{,}05t^2 + 6$ expressa a concentração de monóxido de carbono no ar em função da variável t.

Por exemplo, daqui a 5 anos, a quantidade média (em partes por milhão) de monóxido de carbono no ar durante o dia na cidade é $0{,}05.5^2 + 6 = 0{,}05.25 + 6 = 7{,}25$ partes por milhão. Veja que basta substituir o tempo t = 5 na função composta que obtivemos anteriormente!

Para resolver o item b do problema precisamos fazer c(p(t)) = 6,8 e explicitando t, temos:

$$0{,}05.t^2 + 6 = 6{,}8$$

$$0{,}05.t^2 = 0{,}8$$

$$t^2 = \frac{0{,}8}{0{,}05} = 16 \Rightarrow t = \pm\sqrt{16} \Rightarrow t = \pm 4$$

Como não consideramos tempos t negativos, concluímos que a concentração de monóxido de carbono no ar durante o dia atingirá o valor de 6,8 partes por milhão daqui a 4 anos.

---

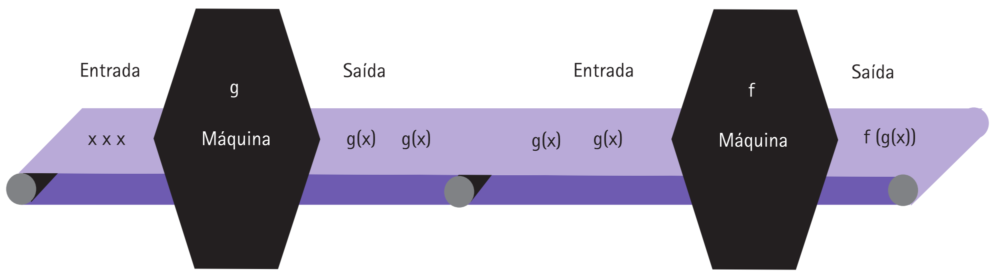
[3] Este exemplo foi e adapatado pela autora da obra: HOFFMANN, Laurence D. & BRADLEY, Gerald L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002 (p.6).

Existem muitas situações, como as apresentadas acima, nas quais uma grandeza é dada como função de uma variável que, por sua vez, pode ser escrita como uma função de outra variável. Combinando ("compondo") as funções de forma apropriada, é possível expressar a grandeza original em função da variável independente da segunda função. Esse processo é conhecido como **composição de funções**.

Definições e observações

Dadas as funções $f(u)$ e $g(x)$, a **função composta** $f(g(x))$ é a função formada de x substituindo u por $g(x)$ na expressão de $f(u)$.

A função composta $f(g(x))$ pode ser encarada como uma linha de montagem! Veja o desenho abaixo:



Observe que a função composta $f(g(x))$ só faz sentido se o domínio da função f contém o contradomínio da função g. Na figura anterior podemos perceber isso, onde a função composta é mostrada como uma "linha de montagem" na qual a "matéria-prima" x é convertida em um produto intermediário" $g(x)$, que por sua vez é convertido em um "produto final" $f(g(x))$.

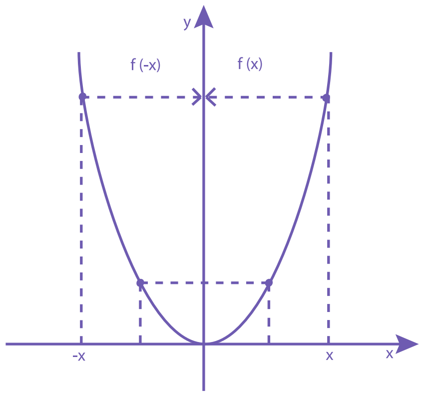
8.3 Função par e função ímpar

Definições e observações

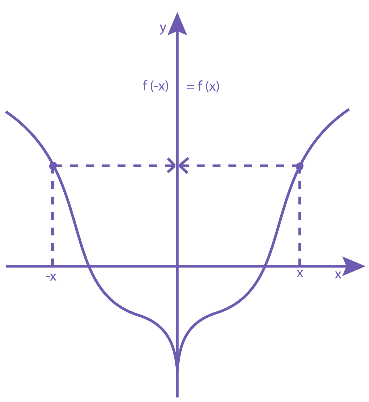
Uma função f: (-c,c) $\longrightarrow$ R é uma função par se, para todo x pertencente ao intervalo (-c,c) tivermos $f(-x) = f(x)$.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é uma função par para todo x real. Com efeito, para qualquer valor x real temos que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Como é mesmo o gráfico da função $f(x) = x^2$? Uma parábola, certo?



O gráfico de todo função par tem uma propriedade especial: ele é simétrico em relação ao eixo-y (das ordenadas). De uma forma geral, veja o comportamento de uma função par no gráfico abaixo:

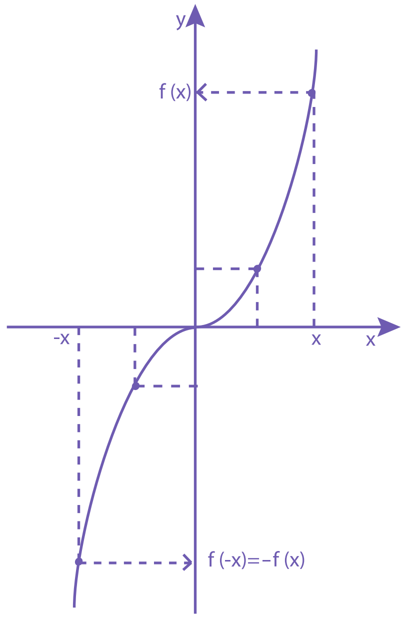


Definições e observações

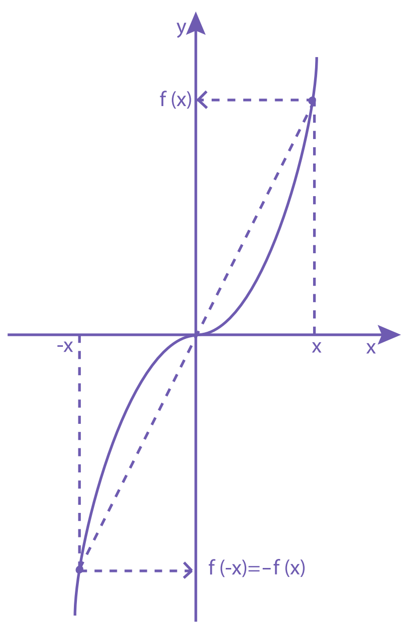
Uma função f: (-c,c) $\longrightarrow$ R é uma **função ímpar** se, para todo x pertencente ao intervalo (-c,c) tivermos $f(-x) = - f(x)$.

Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar para todo x real. Com efeito, para qualquer valor x real temos que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = - f(x)$.

Como é mesmo o gráfico da função $f(x) = x^3$?



O gráfico de todo função ímpar tem uma propriedade especial: ele é simétrico em relação ao ponto de origem O. De uma forma geral, veja o comportamento de uma função ímpar no gráfico abaixo:

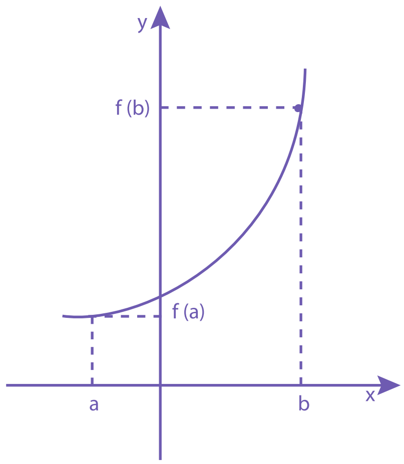


8.4 Função crescente e função decrescente

Definições e observações

Uma função f é **crescente** se para todos os elementos a e b do domínio de f tem-se que: se $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

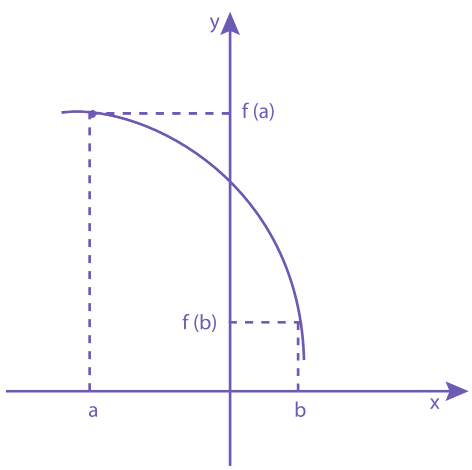
Veja o comportamento de uma função crescente:



Definições e observações

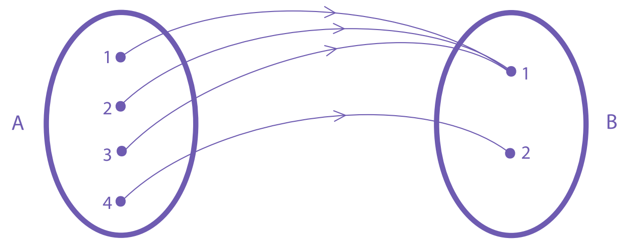
Uma função f é **decrescente** se para todos os elementos a e b do domínio de f tem-se que: se $a < b$, então $f(a) > f(b)$.

Veja o comportamento de uma função decrescente:



8.5 Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

Uma função f de A em B (isto é, f: A → B) é **sobrejetora** se todo elemento de B é imagem de ao menos um elemento de A. Observe isso no diagrama abaixo:



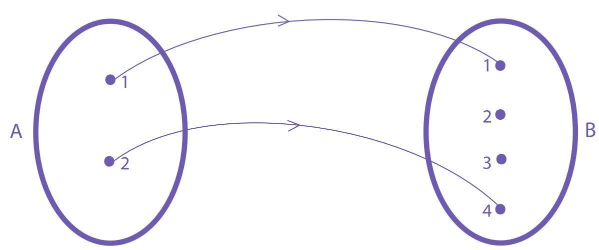
O exemplo do diagrama acima exibe uma função que todo elemento do conjunto B é imagem de pelo menos um elemento do domínio A. Assim, numa função sobrejetora, o conjunto imagem e o contradomínio são coincidentes. Numa forma simbólica dizemos que uma função f: A→B é **sobrejetora** se para todo elemento y de B, existe um x pertencente ao conjunto A tal que y = f(x), ou, simbolicamente: $\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)$.

Uma função f de A em B (isto é, f: A→B) é **injetora** se, e somente se, cada elemento de B é imagem de apenas um elemento de A, ou seja, elementos distintos no domínio têm como imagem, elementos distintos no contradomínio. Numa linguagem simbólica, f: A→B é **injetora** se para todos os elementos $a, b \in A; a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

Podemos também fazer a negação da frase acima e dizer o seguinte: sendo f injetora, para todos os elementos a e b do conjunto A, temos que se as imagens de a e b são iguais, então a e b também são iguais. Em linguagem simbólica: $a, b \in A; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Fazer a afirmação acima significa dizer que cada elemento y da imagem da função f provém de um único elemento x do seu domínio (não se pode ter dois elementos distintos do domínio, através da f injetora, serem levados a uma única imagem). Uma forma de interpretar isso visualmente (através do gráfico da função) é fazer o teste da linha horizontal. Como efeito, se ao traçar alguma linha horizontal no gráfico de f e tal linha cortar o gráfico da função em mais de um ponto, então existem pontos distintos do domínio tal que suas imagens são iguais.

Observe que o diagrama abaixo mostra um exemplo do comportamento de uma função injetora:



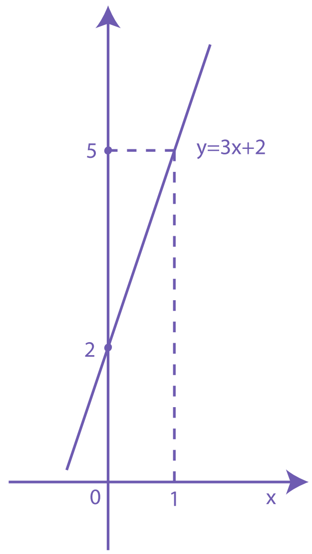
Uma função f: A → B é **bijetora** quando for, ao mesmo tempo, sobrejetora e injetora. Pense você agora na representação simbólica da definição de função bijetora! Tente escrever como fizemos para as funções sobrejetora e injetora.

A definição de função bijetora é equivalente a apresentar o seguinte: a função f: A → B é **bijetora** se e somente se, para todo y pertencente a B, existe um único x pertencente ao conjunto A tal que f(x) = y.

Em lugar de dizermos "f é uma função bijetora de A em B" poderemos dizer "f é uma bijeção de A em B".

Por exemplo, a função f: R → R definida por y = 3x + 2 é bijetora. Vamos entender por quê?

Vejamos primeiro como é o gráfico da função y = 3x + 2:



Agora observe o seguinte:

▶ qualquer que seja y∈R, existe x∈R tal que y = 3x + 2, basta tomarmos $x = \frac{y-2}{3}$ e fazer a verificação. Logo, f é sobrejetora. Essa verificação é dada da seguinte forma: dado qualquer y∈ R, existe sempre $x = \frac{y-2}{3}$ tal que $f(x) = 3x + 2 = 3.\frac{y-2}{3} + 2 = y - 2 + 2 = y$
Nós encontramos o x real que faz sempre acontecer f(x) = y!

▶ quaisquer que sejam , isto é, f é injetora.

Concluímos então que a função f(x) = 3x + 2 é bijetora, já que é sobrejetora e injetora.

8.6 Função inversa

Para finalizar nossa disciplina apresentaremos uma definição envolvendo funções: o que é função inversa?

Sejam dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5, 7} e consideremos a função f de A em B definida por f(x) = 2.x -1.

Construindo a tabela:

x	y = 2.x-1
1	1
2	3
3	5
4	7

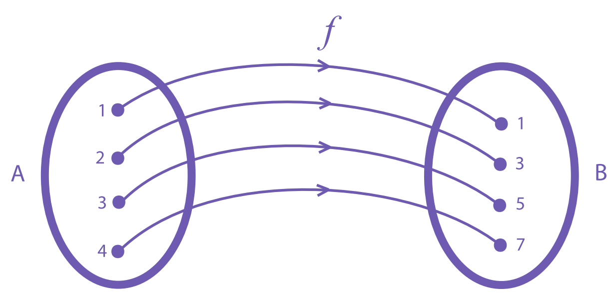
Podemos observar que a função f(x) = 2.x -1 é bijetora formada pelos pares ordenados f = {(1,1); (2,3); (3,5); (4,7)} onde D(f) = A e Im(f) = B. De fato,

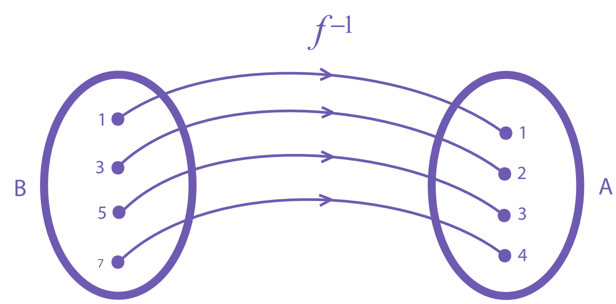
$$\forall y, y \in B, \exists! x, x \in A / f(x) = y$$

Agora, pense se é possível invertermos os pares formando o conjunto g = {(1,1); (3,2); (5,3); (7,4)} e exibir uma função g que associa cada primeiro elemento desses pares ao segundo elemento?

Se isso for possível, então dizemos que a função g, assim definida, é a inversa da função g. Observemos que se tomarmos a função $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$ temos exatamente o que desejávamos! Confira que para cada elemento do conjunto B = {1, 3, 5, 7}, a função g definida da forma anterior leva unicamente ao conjunto A = {1, 2, 3, 4}.

Veja os diagramas abaixo:





Essa função inversa de f, denotada por f-1, é uma bijeção de A em B, isto é, para todo elemento y de B existe um único x de A tal que (y,x) pertence ao conjunto f-1.

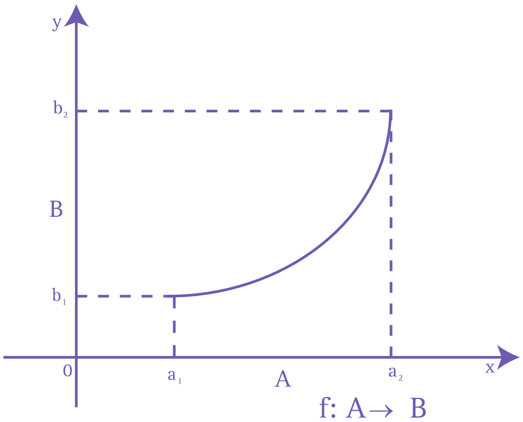
A definição de função inversa só é aplicável às funções bijetoras:

Seja f: A→B uma função bijetora. Assim, podemos definir uma **função inversa** f^{-1}: B→A tal que x = f^{-1}(y). Em outras palavras:

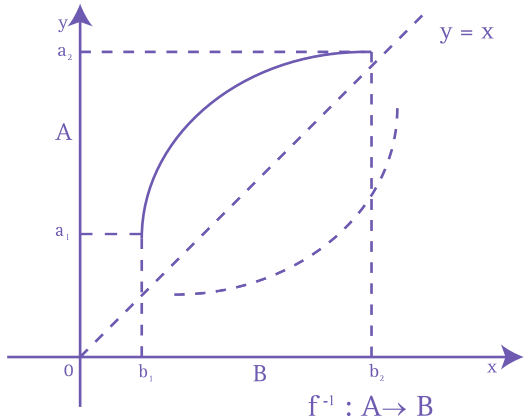
$$f^{-1} : B \to A$$

$$y \to x = f^{-1}(y)$$

Vamos observar os comportamentos dos gráficos a seguir de uma função e sua inversa:



f: A→ B
a ↦ b = f(a)



f^{-1} : A→ B
a ↦ b = f^{-1} (a)

Definições e observações

- Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f, permutando-se os elementos de cada par, isto é $(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$;
- O domínio da função f^{-1} é B, que é a imagem da função f;
- A imagem da função f^{-1} é A, que é o domínio da função f.

Uma questão que normalmente surge quando estamos estudando sobre função inversa é: dada uma função bijetora f de A em B, definida pela sentença y = f(x), como proceder para obtermos a sentença que define f^{-1}, isto é, a inversa de f?

Primeiro: Na sentença y = f(x) fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo x = f(y);

Segundo: Transformamos algebricamente a expressão x = f(y), expressando y em função de x para obtermos y = f^{-1}(x).

Exemplo

Qual é a função inversa da função f bijetora de R em R definida por f(x) = x^3?

Conforme apresentamos os passos acima (uma regra prática) temos que a função dada é f(x) = y = x^3 e, permutando as variáveis, obtemos x = y^3 $\rightarrow$ $y = \sqrt[3]{x}$. Logo, a função inversa f^{-1} de R em R de f(x) = x^3 é a função definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

É possível demonstrar uma propriedade que envolve as funções e suas inversas que afirma que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano (ou, em relação à reta cuja equação é y = x).

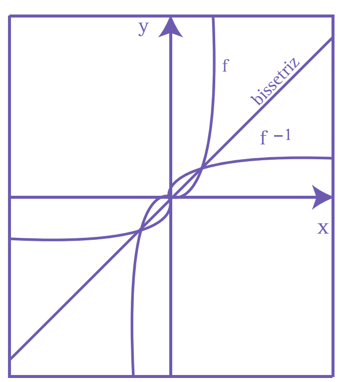
Como exemplo, observe os gráficos, num mesmo plano cartesiano, das funções y = x^3 e da sua inversa $y = \sqrt[3]{x}$ e confira a simetria em relação à reta y = x:

$y = x^3$

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

$y = \sqrt[3]{x}$

x	y
-27	-3
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2
27	3



1| Determine a função composta $f(g(x))$ para $f(u) = u^2 + 3u + 1$ e $g(x) = x + 1$.

2| Invertendo os papéis de f e g na definição de função composta, é possível definir a composição $g(f(x))$. Assim, no caso da atividade 1 acima, encontre $g(f(x))$ e verifique se $f(g(x)) = g(f(x))$.

3| Em uma fábrica, o custo de produção de n unidades de uma certa mercadoria é $C(n) = n^2 + n + 900$ reais. Num dia típico, são fabricadas $n(t) = 25.t$ unidades durante t horas de trabalho.

a) Expresse o custo de produção C em função da quantidade t de horas de trabalho;
b) Qual é o gasto na produção nas primeiras 4 horas de trabalho?
c) Quantas horas de trabalho são necessárias para que o custo de produção chegue a R$11.000,00?

4| Para cada uma das funções seguintes, diga se ela é par, ímpar ou nenhuma das duas. Justifique:

a) $f(x) = 3x$
b) $f(x) = - x^2$
c) $f(x) = 2x3$
d) $f(x) = x -1$

5| Esboce também o gráfico de cada uma das funções elencadas na questão anterior.

6| Como fizemos no exemplo anterior, conclua se cada uma das funções é ou não sobrejetora, injetora e bijetora:

$a) f : R \to R; f(x) = x$

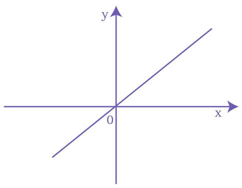
$b) f : R_+ \to R; f(x) = x^2$

$c) f : R \to R; f(x) = x - 1$

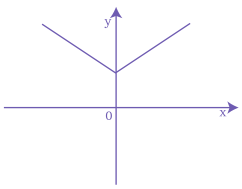
$d) f : R \to R; f(x) = x^2$

7| Os gráficos a seguir representam funções reais de variáveis reais. Para cada caso, diga se a função é ou não sobrejetora, injetora e bijetora. Justifique suas afirmações!

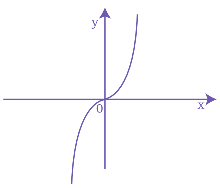
a)



b)



c)



8| Encontre a lei da função inversa de cada uma das funções a seguir:

$a) f(x) = 2x$

$b) f(x) = -x$

$c) y = 9x$

$d) y = -4x^3 - 5$

9| Ache a lei da função inversa da função f: R*→R* definida por $f(x) = \frac{1}{x}$

10| A função temporal da posição de um objeto móvel s em função do tempo t é dada pela lei s = 15 + 12t. Exprima t em função de s e interprete esse resultado.

ALONSO; FINN. ***Física: um curso universitário***. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

ANJOS, Ivan Gonçalves dos. ***Física***. Coleção Horizontes. São Paulo: IBEP.

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antonio de Toledo. ***Física Básica:*** volume único. São Paulo: Atual.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações***. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

MORETTIN, Pedro A., BUSSAB, Wilton O.; HAZZAN, Samuel. ***Cálculo: funções de uma variável***. 3ª ed. atual e ampl. São Paulo: Atual, 1999.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. ***Matemática para o ensino médio***. Volume único. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

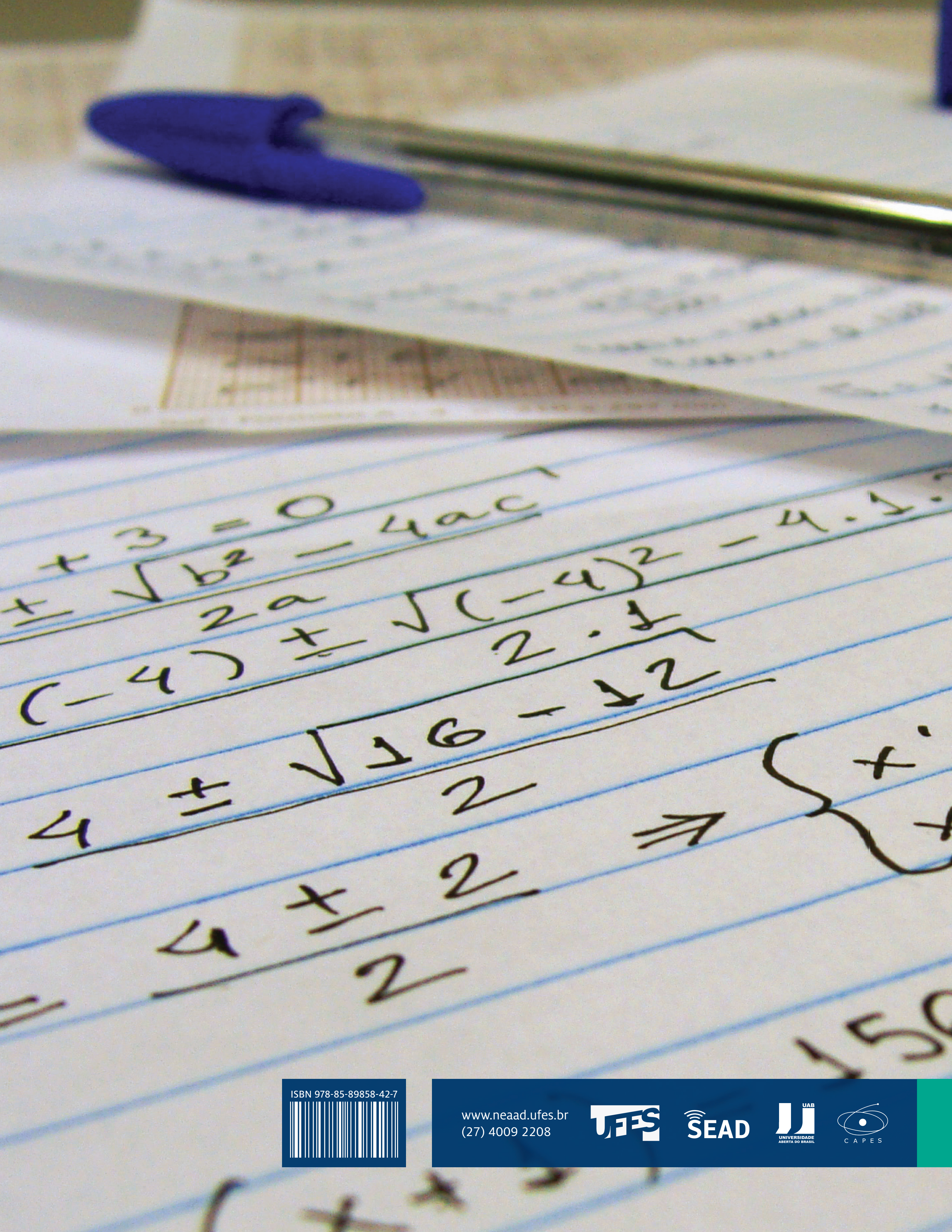
VERAS, Lília L. ***Matemática aplicada à economia***. 3. ed. São Paulo: Atlas: 1999.

Andressa Cesana

Mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro– Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo. Professora Assistente do Departamento de Engenheria e Ciências Agrárias (DECE) do Centro Universitário Norte do Espírito Santo/CEUNES/UFES e formadora do Pró-Letramento em Matemática CEFOCO/UFES/MEC. Publicações: co-autora do Fascículo 6, Tratamento da Informação do Pró-Letramento em Matemática (MEC/SEB).

Joccitiel Dias da Silva

Especialista em Matemática pela PUC-Rio, Mestre em Matemática e Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática da UFRJ. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo/UFES. Áreas de interesse: Mecânica do Contínuo e Equações Diferenciais Parciais. Atuando na formação continuada de professores das redes públicas.



ISBN 978-85-89858-42-7

www.neaad.ufes.br
(27) 4009 2208