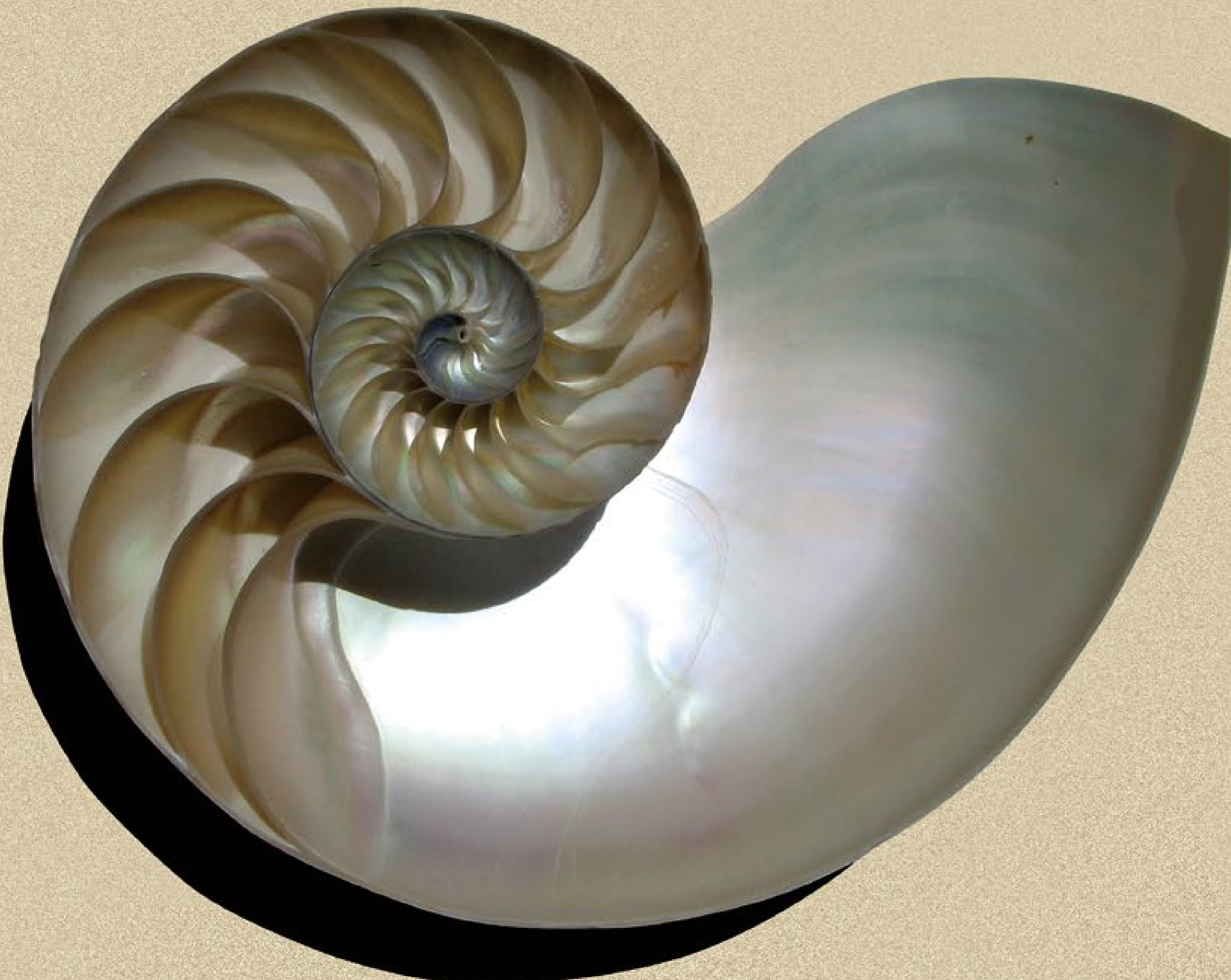
Cálculo I

Aldo Vignatti e Andressa Cesana Biral



Universidade Federal do Espírito Santo
Secretaria de Ensino a Distância

Física
Licenciatura

A primeira disciplina de cálculo é básica para todas as outras disciplinas de cálculo, equações diferenciais, mecânica, termodinâmica e várias outras disciplinas do curso de física.

Este fascículo contém um pouco de história do cálculo, ferramentas básicas para um primeiro curso de cálculo tais como limites, continuidade, teorema do sanduíche, teorema do valor intermediário, derivadas e suas aplicações, teorema do valor médio, regra de L'Hôpital, integrais, o teorema fundamental do cálculo e suas aplicações.

Os exemplos e exercícios foram escritos de forma que o grau de dificuldade aumente gradativamente. Acrescentamos uma breve discussão sobre funções exponenciais e logarítmicas e uma revisão sobre trigonometria no apêndice.

Os conhecimentos obtidos em derivadas servirão para resolver problemas de otimização e para desenhar gráficos de funções. Você perceberá que quando não é possível resolver o problema, procura-se entendê-lo para simplificá-lo.

Recomendamos que o aluno busque aumentar os seus conhecimentos de cálculo em uma leitura complementar.

Bons estudos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria de Ensino a Distância

CÁLCULO I

Aldo Vignatti
Andressa Cesana Biral

Vitória
2015

Presidente da República
Dilma Rousseff

Ministro da Educação
Renato Janine Ribeiro

Diretoria de Educação a Distância DED/CAPES/MEC
Jean Marc Georges Mutzig

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Reitor
Reinaldo Centoducatte

Secretária de Ensino a Distância – SEAD
Maria José Campos Rodrigues

Diretor Acadêmico – SEAD
Júlio Francelino Ferreira Filho

Coordenadora UAB da UFES
Teresa Cristina Janes Carneiro

Coordenadora Adjunta UAB da UFES
Maria José Campos Rodrigues

Diretor do Centro de Ciências Exatas (CCE)
Armando Biondo Filho

Coordenadora do Curso de Graduação Licenciatura em Física – EAD/UFES
Giuseppi Gava Camiletti

Revisor de Conteúdo
Antônio Canal Neto

Revisor de Linguagem
Santinho Ferreira de Souza

Design Gráfico
Laboratório de Design Instrucional – SEAD

SEAD
Av. Fernando Ferrari, nº 514
CEP 29075-910, Goiabeiras
Vitória – ES
(27) 4009-2208

Material produzido originalmente sob supervisão do Coordenador do Curso de Física, Angela Emilia de Almeida Pinto.

Laboratório de Design Instrucional (LDI)

LDI Coordenação
Heliana Pacheco
José Otavio Lobo Name
Hugo Cristo

Gerência
Equipe:
Verônica Salvador Vieira

Diagramação
Equipe:
Davi de Jesus Cáo

Ilustração
Equipe:
Ivanise Borges
Lidiane Cordeiro
André Wandenkolken

Capa
Vitor Bergami Victor

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

V679c Vignatti, Aldo.
Cálculo I / Aldo Vignatti, Andressa Cesana Biral. - Vitória : Universidade Federal do Espírito Santo, Secretaria de Ensino a Distância, 2009.
164 p. : il.

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-99510-52-0
Reimpressão, 2015.

1. Cálculo. I. Biral, Andressa Cesana. II. Título.

CDU: 517

SUMÁRIO

4 - ANTIDERIVADAS

APRESENTAÇÃO

Olá!

Prezado aluno, prezada aluna, foi com muito zelo que preparamos esta disciplina para vocês. O Cálculo I é importantíssimo no seu curso, porque tem o objetivo de apresentar ferramentas matemáticas imprescindíveis para serem utilizadas frequentemente nas disciplinas específicas da Física. Assim, sem a base que o Cálculo Diferencial e Integral fornece, não vai ser possível continuar a caminhada.

Por isso, tentem aproveitar e estudar o máximo que for possível os conteúdos, notas históricas e atividades propostas, e desejamos a vocês uma ótima viagem pelo Cálculo Diferencial e Integral I!

Como será a estrutura deste texto?

Acreditamos que a história da Matemática deve ser parte inerente ao estudo de qualquer conteúdo matemático, por isso tentaremos sempre que possível apresentar notas históricas juntamente com o conteúdo a ser apreendido. Serão propostas também atividades/problemas que vocês deverão sempre tentar resolver.

Pode-se dizer que a resolução de problemas é uma área de estudos atualmente da Educação Matemática que se preocupa em demonstrar a importância fundamental de como os problemas práticos, do cotidiano, que sejam significativos para o aluno, são imprescindíveis no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Dessa forma, esperamos que vocês sintam-se motivados a resolver problemas!

É preciso lembrar também que este é um curso "virtual", por isso seu papel deve ser de alunos ativos, participantes, pesquisadores, e, principalmente, persistentes. Além disso, vocês terão como orientador seu tutor. Poderão e deverão sempre contar com ele para tirar suas maiores dúvidas, discutir resoluções de problemas e pedir orientações.

Nesta viagem, que estão prestes a fazer, vocês contarão com a nossa orientação, seremos o seu guia. Entretanto também nos baseamos em livros-textos já existentes de modo que vocês não devem se limitar apenas ao que propomos aqui. Esses textos estarão todos citados na bibliografia deste fascículo, para que, sempre que possível, vocês possam buscá-los como fontes de estudos.

1. O QUE É CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL?

1.1 INTRODUÇÃO

Muitos historiadores e autores matemáticos apresentam uma classificação no mínimo interessante para a Matemática desenvolvida até o século XVI: "Matemática Elementar". Porque a partir do século XVII, as novas descobertas na Matemática deram-se num âmbito superior principalmente no sentido do desenvolvimento e da utilização de poderosas ferramentas para resolver problemas que envolviam movimento e taxas de variação. A Matemática produzida a partir daí é dita "Matemática Superior".

Na verdade, podemos dizer que toda Matemática que estudamos até o Ensino Médio está inserida na classificação Matemática Elementar. E agora, nesta disciplina principalmente, começamos a aprender conceitos da Matemática Superior.

Para termos uma boa noção disso, o Cálculo Diferencial e Integral, apoiado pela Geometria Analítica, foi a maior ferramenta matemática descoberta no século XVII. O Cálculo se mostrou claramente poderoso e eficiente no processo de resolução de alguns problemas que antes tinham soluções desconhecidas. Mas vale salientar que os matemáticos daquela época ainda não tinham necessidade nem preocupação com a fundamentação do assunto. Apenas utilizavam as ferramentas que o Cálculo oferecia para resolver seus problemas.

O estudo do Cálculo teve por principal objetivo o estudo do movimento e da variação dos objetos (corpos). Isso quer dizer que o desenvolvimento do Cálculo esteve diretamente relacionado com a Física. Isso é muito bom, pois já justifica a importância desta disciplina no seu curso.

1.2 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DO CÁLCULO

O que significa Cálculo?

Para os romanos do império, "calculus" significavam seixos (pedrinhas) usados em contagens e em jogos e, mais tarde, a palavra "calculare" passou a significar computar, contar, calcular.

Hoje, a palavra "cálculo" pode ser entendida como a matemática elementar aperfeiçoada pelo processo de limite. Os sinais de usos do Cálculo são bem antigos, até chegarmos nesta área da Matemática Superior como vemos atualmente. Na verdade, o Cálculo é produto de um longo processo de evolução que teve início na Grécia Antiga e foi retomado nos séculos XVII e XVIII. O final do século XVII e início do XVIII foram gastos em grande parte na exploração de novos e poderosos métodos do Cálculo. Já o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica e sólida para o Cálculo. Muitos cientistas, ao longo do tempo, contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Visite o site http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20062/mat341/calculo.pdf e leia mais sobre essa história.

O Teorema Fundamental do Cálculo é o "coração" da nossa disciplina, é o resultado que relaciona o problema das tangentes com o cálculo de áreas.

Quem são os verdadeiros descobridores do Cálculo?

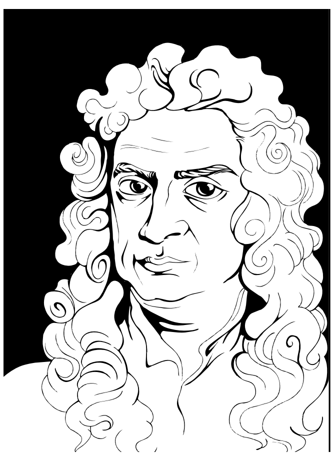


Figura 1.1
Isaac Newton

Figura 1.2
Gottfried Wilhelm Leibniz

O inglês Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) são considerados os descobridores do Cálculo. Eles foram dois grandes gênios do século XVII, mas podemos dizer que o assunto não começou nem terminou com eles.

Há uma grande polêmica sobre quem teria criado primeiro o Cálculo. A opinião generalizada atualmente é que ambos foram descobridores iniciais, mas de forma independente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados.

Dois problemas geométricos importantes norteiam a base do Cálculo. Considere dado o gráfico de uma função $y = f(x)$, e sejam os problemas e suas respectivas representações em figuras:

1) Problemas de Tangentes: calcular o coeficiente angular da reta tangente t à curva num ponto P;

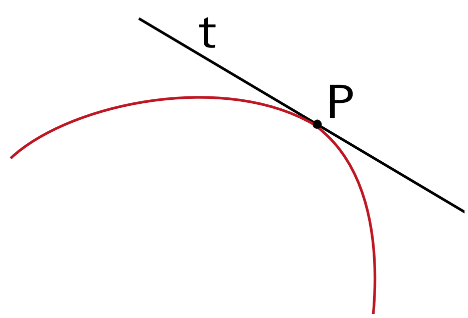


Figura 1.3

A figura acima dá a idéia do problema: deseja-se encontrar a inclinação da reta tangente à curva num dado ponto.

2) Problema de Áreas: calcular a área debaixo do gráfico entre os pontos $x = a$ e $x = b$

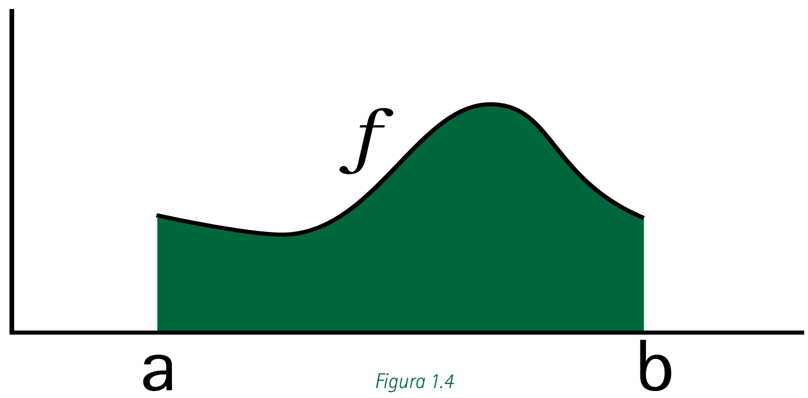


Figura 1.4

De modo análogo, a figura acima indica o problema da área: qual é o número real que representa a área sob a curva no intervalo dado e acima do eixo x?

A grande realização de Newton e Leibniz foi reconhecer e explorar a íntima ligação entre esses dois problemas. Eles foram os primeiros a entender o Teorema Fundamental do Cálculo: "a solução do problema das tangentes pode ser usada para resolver o problema das áreas".

Esse Teorema é um dos mais importantes da Matemática!

Em 1684 e em 1686, acontece a publicação dos trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral sob o título Calculus Summatorius. Foi Leibniz que consolidou a notação usada até hoje para representar uma integral.

Por algum tempo, após Newton e Leibniz, os fundamentos do Cálculo permaneceram obscuros e despercebidos, pois já era enorme a aplicabilidade dessa ferramenta. Isso foi o que atraiu os primeiros pesquisadores para o caminho de teorização do Cálculo.

Dentre os primeiros cientistas a perceberem a potência espantosa do Cálculo e que o aplicaram em uma enorme quantidade de problemas, estavam dois irmãos suíços Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748). É interessante mencionar que, com um número surpreendente de matemáticos e cientistas entre seus membros, a família Bernoulli ocupa um lugar ímpar na história da Ciência e, em particular é claro, na história da Matemática.

O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

Embora o Cálculo tenha se desenvolvido para resolver problemas de Física, sua potência e versatilidade levaram suas aplicações aos mais diversos campos de estudos. De fato, o Cálculo atualmente é largamente usado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática e de Física, mas também de Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química e outras.

2. LIMITES DE FUNÇÕES

2.1 INTRODUÇÃO

Nesta primeira parte do nosso curso, vamos estudar o conceito de LIMITE que é a base para todos os outros conceitos do cálculo. Assim, tendo em vista a importância desse conceito matemático para o Cálculo Diferencial e Integral, é preciso que o aluno seja um investigador no processo de compreensão de limite de funções que apresentaremos a seguir.

O objetivo deste primeiro capítulo é propiciar a você, estudante, condições de: compreender os conceitos importantes sobre limites de funções e aplicar as propriedades de limites de funções na resolução de problemas.

Você não pode deixar de participar das atividades práticas que serão oferecidas na plataforma virtual, a fim de esclarecer dúvidas e propiciar momentos de troca de aprendizagem com os outros colegas que também fazem este curso. Para este capítulo, pretende-se abrir fóruns de debates para discutir as resoluções das atividades propostas no fascículo, que foram mais complexas ou geraram mais dúvidas. Participe! Não perca!

2.2 NOÇÕES DE LIMITES

Dada uma função f, qual é o comportamento da função $f(x)$, quando x está suficientemente próximo de um número real a? Perguntas deste tipo serão respondidas aqui. Veja alguns exemplos.

• EXEMPLO 1: O que acontece com x^2 quando x se aproxima do número 3?

Resposta: x^2 se aproxima de 9.

E o que acontece com $\frac{x^3}{x}$ quando x se aproxima do número 0?

Resposta: $\frac{x^3}{x}$ se aproxima de 0.

Para facilitar, basta ver que para $x \neq 0$, tem-se $\frac{x^3}{x} = x^2$.

Esses dois exemplos mostram que, se estivermos interessados em saber o comportamento de certas funções perto do número zero, ou qualquer outro, devemos olhar para as imagens de números perto do zero ou das vizinhanças do zero.

O conceito de limite que será mostrado mais à frente, permite dizer o comportamento de uma função na vizinhança de um número $x = a$, sem que se tenha a imagem da função no ponto a. Para isso, buscam-se informações pelas imagens das vizinhanças do ponto a.

• EXEMPLO 2: Qual é o comportamento de $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ quando x se aproxima do número 1?

Resposta: $(x - 1)^3 + 2$ se aproxima de 2.

E qual é o comportamento de $g(x) = \dfrac{(x-1)^4}{x-1} + 2$ quando x se aproxima do número 1?

Resposta:

$$g(x) = \frac{(x-1)^4}{x-1} + 2$$

se aproxima de 2. Basta ver que para $x \neq 1$, tem-se $\frac{(x-1)^4}{x-1} + 2 = (x-1)^3 + 2$. Os gráficos de f e g estão mostrados abaixo. O gráfico de g mostra uma bolinha • no ponto (1,2) para representar que naquele ponto g não está definida. Os dois gráficos mostram várias bolinhas pintadas de vermelho sobre o gráfico para representar o comportamento da função quando x se aproxima de 1.

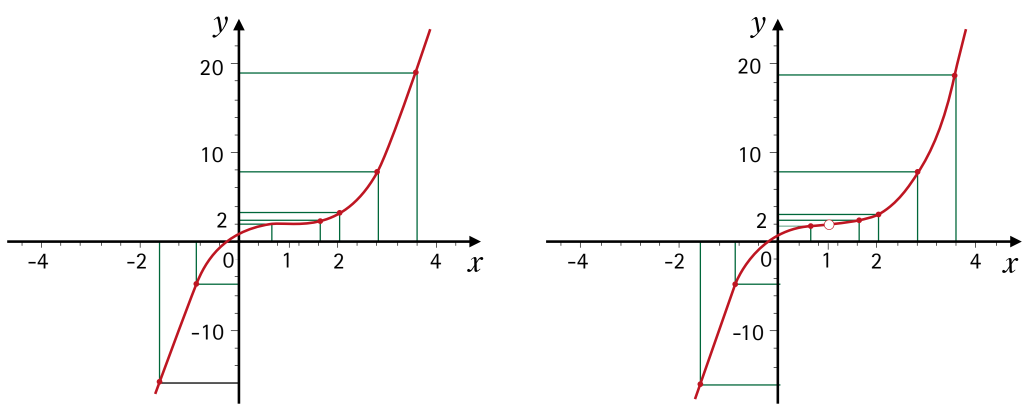


Figura 2.1

• EXEMPLO 3: O que acontece com $\frac{1}{x}$ quando x se aproxima de zero?

Se x = 0,1 então $\frac{1}{x}$ = 10.

Se x = 0,01 então $\frac{1}{x}$ = 100.

Se x = 0,0005 então $\frac{1}{x}$ = 2000.

Se x = 0,0001 então $\frac{1}{x}$ = 10000.

Se x = -0,0005 então $\frac{1}{x}$ = -2000.

Se x = -0,0001 então $\frac{1}{x}$ = -10000.

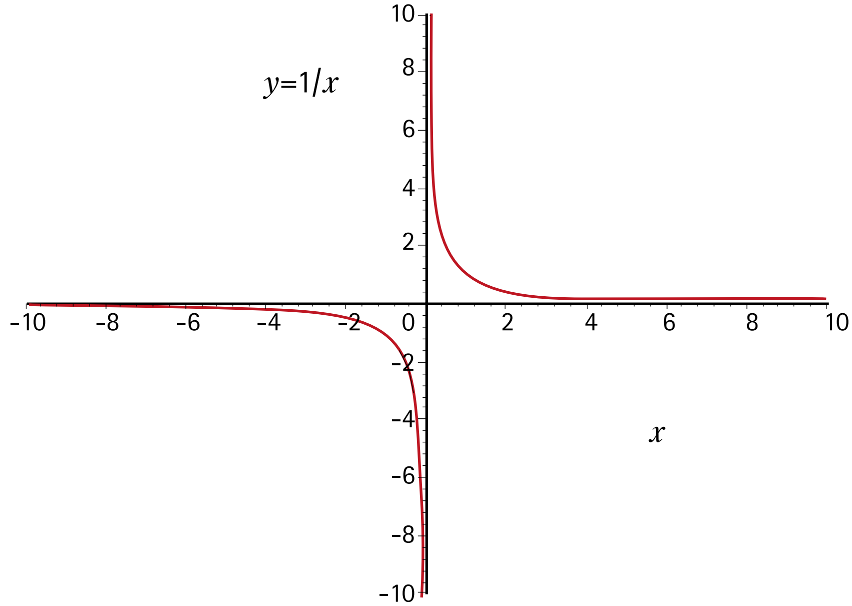


Figura 2.2

Percebe-se que, se x é um número suficientemente próximo do número zero e está a direita de zero, ou seja, se x é positivo, então $\frac{1}{x}$ torna-se "muito grande". **É costumeiro dizer que $\frac{1}{x}$ tende para o infinito quando x tende para zero pela direita**.

Para denotar o infinito, usamos o símbolo ∞. Para denotar que x tende a zero, usamos os símbolos $x \to 0$ e para denotar que $\frac{1}{x}$ tende para infinito usamos o símbolo $\frac{1}{x} \to \infty$. A frase em negrito acima é rescrita na forma:

$\frac{1}{x} \to \infty$ quando $x \to 0$ com $x > 0$.

Observação: usaremos ∞ no lugar de +∞.

Por outro lado, se x tende para o número zero pela esquerda de zero (x negativo) então $\frac{1}{x}$ tende para -∞.

2.3 CONCEITO DE LIMITE

Os gráficos das funções abaixo apresentam casos em que o limite está bem definido e casos em que o limite não existe. Vamos analisar os gráficos.

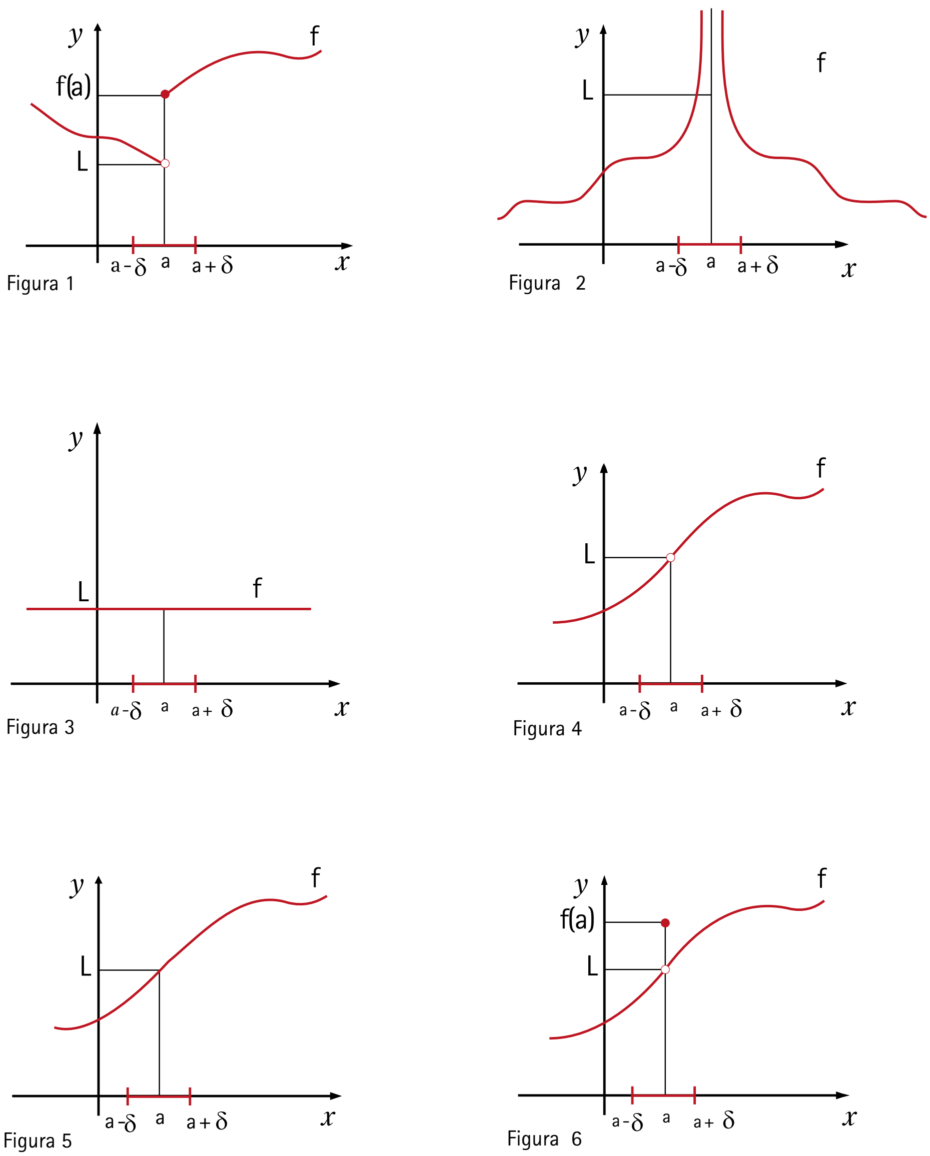


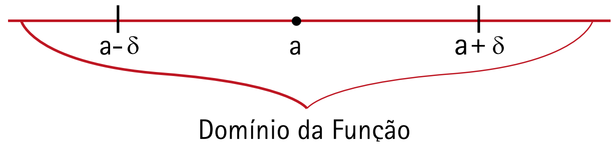
Figura 2.3

Analisando todos os gráficos acima, pergunta-se:

1) Em que casos $a \in Dom(f)$?

Resposta: Figuras 1, 3, 5 e 6.

2) Em que casos *Dom(f)* contém um intervalo com centro em *a*? Isto é, em que casos *Dom(f)* contém uma vizinhança do tipo $(a-\delta, a+\delta)$?



Resposta: Figuras 1, 3, 5 e 6.

3) Em que casos *Dom(f)* contém um intervalo do tipo acima, com exceção do próprio a, isto é, contém $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$?

Resposta: Figuras 2 e 4.

Agora, para as perguntas seguintes, vamos tornar mais precisas matematicamente algumas expressões! Vejamos:

PRIMEIRO: Diremos que "x_1 está mais perto de a do que x_2 se a distância de x_1 até a for menor do que a distância de x_2 até a, isto é, se $|x_1 - a| < |x_2 - a|$.

SEGUNDO: Diremos que "um ponto variável x na reta real fica arbitrariamente próximo de um ponto fixado a ou tende para um ponto fixado a" se a distância de x até a se torna arbitrariamente pequena. Isso pode ser expresso se dissermos que $|x - a|$ fica arbitrariamente pequeno, ou seja, dado qualquer número $r > 0$, $|x - a|$ fica menor do que r.

4) Em que casos pode-se dizer que "quanto mais perto x fica de a, então $f(x)$ fica mais perto de L"?

Resposta: Figuras 3, 4, 5 e 6.

5) Em que casos pode-se dizer que "quanto mais perto x fica de a com $x > a$, então $f(x)$ fica mais perto de L"?

Resposta: Figuras 1, 3, 4, 5 e 6.

6) Em que casos pode-se dizer que "quanto mais perto x fica de a, então a distância de $f(x)$ até L não aumenta"? (ou seja, a distância permanece constante ou diminui).

Resposta: 3, 4, 5 e 6.

7) Em que casos pode-se dizer que "os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L para todo x pertencente a um intervalo do tipo $(a-\delta, a+\delta)$ suficientemente pequeno"?

Resposta: 3, 4 e 5.

8) Em que casos pode-se dizer que "os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L para todo x pertencente a um conjunto do tipo $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ com δ suficientemente pequeno"?

Resposta: 3, 4, 5 e 6.

Observe e reflita a seguinte definição:

Definição de limite

Seja f uma função cujo domínio contém um conjunto do tipo $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$. Diremos que o limite de f quando x tende para a é L se os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente próximos de L, para todo x pertencente a um conjunto do tipo $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ com δ suficientemente pequeno e escreveremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

a) Agora, a partir dos gráficos apresentados inicialmente, em que casos se tem

$$\lim_{x \to a} f(x) = L?$$

Resposta: 3, 4, 5 e 6.

b) Em que casos se tem

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)?$$

Resposta: 3 e 5.

c) Para que a pergunta anterior faça sentido, f deve estar definida em um intervalo de que tipo? Explique!

Resposta: O domínio de f deve conter um intervalo com centro em a do tipo $(a-\delta, a+\delta)$. Para que exista o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ o domínio de f deve conter alguma vizinhança vazada de a, do tipo $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$. E para que $\underset{r \to a}{\text{im}}\, f(x) = f(a)?$, f deve estar definida também em a.

2.4 LIMITES LATERAIS

Exibimos abaixo exemplos de funções cujos gráficos são do tipo das figuras 4 e 5 respectivamente.

• EXEMPLO 4: O que acontece com $\frac{x^2-9}{x-3}$ quando x se aproxima do número 3?

Observe que *f(x)* não está definida em $x = 3$, ou seja, o número 3 não pertence ao domínio de *f*. Perceba ainda que se $x \neq 3$ então

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

O gráfico de *f(x)* é

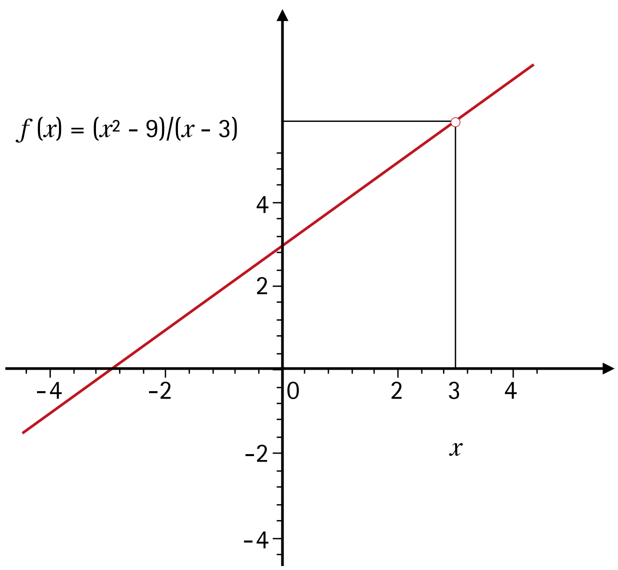


Figura 2.4

Se x se aproxima do número 3 pela esquerda então $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ se aproxima de $3 + 3 = 6$. Se x se aproxima do número 3 pela direita então $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ se aproxima de 3 + 3 = 6 . Dizemos neste caso que o limite de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ quando x tende a 3 é 6 e escrevemos $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

• EXEMPLO 5: O que acontece com $g(x) = x + 3$ quando x se aproxima do número 3? Observe que $g(x)$ está definida em $x = 3$, ou seja, o número 3 pertence ao domínio de g, o gráfico de $g(x)$ é

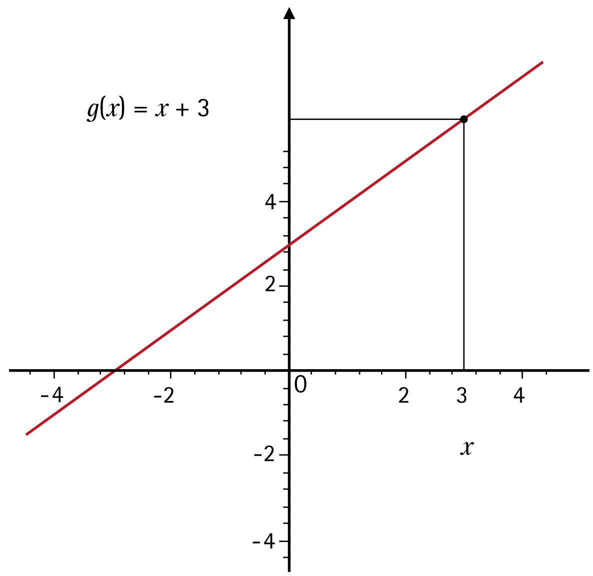


Figura 2.5

Se x se aproxima do número 3 pela esquerda então $g(x) = x + 3$ se aproxima de 6. Se x se aproxima do número 3 pela direita então $g(x) = x + 3$ se aproxima de 6.

Dizemos neste caso que o limite de $g(x) = x + 3$ quando x tende a 3 é 6 e escrevemos

$$\lim_{x \to 3}(x + 3) = 6.$$

O exemplo 4 exibe uma função f cujo limite de f quando x tende a um número a existe mesmo que a função não esteja definida em a. O exemplo 5 exibe uma função g cujo limite de g quando x tende a um número a existe e é igual a $g(a)$. Para calcular o limite de uma função qualquer, digamos f, quando x tende a a, o fato de f estar definida ou não em a não importa. O limite existe conforme seja o comportamento da função f numa vizinhança do número a. Por isso estamos sempre observando o comportamento da função na vizinhança da esquerda e da direita. Fazemos isto quando dizemos que x tende ao número a pela esquerda (ou direita). Quando estamos observando o comportamento da função f na vizinhança da esquerda do número a, estamos observando o que chamamos de limite lateral de f à esquerda de a. A notação usada para o limite lateral à esquerda de f é

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Quando estamos observando o comportamento da função na vizinhança da direita, estamos observando o que chamamos de limite lateral de f à direita de a cuja notação é

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

A partir de agora diremos que o limite de uma função f quando x tende a um número a existe e é igual a um número L se os limites laterais existirem e forem iguais a L.

Na figura 1 vê-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda existe e é L e que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita existe e é $f(a)$. Como os limites laterais são diferentes então o limite de $f(x)$ quando x tende a a não existe. Em resumo,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L, \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

não existe.

Nas figuras 3, 4, 5 e 6 vê-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda existe e é L e que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita existe e é L. Como os limites laterais são iguais então o limite de $f(x)$ quando x tende a a existe e é L. Em resumo,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L, \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

o que implica

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Na figura 2 vê-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é ∞ e que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita também é ∞. Como os limites laterais são iguais então o limite de $f(x)$ quando x tende a a é ∞, ou seja,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

o que implica

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Diremos que um limite existe, somente quando esse limite for um número real. Quando for infinito, então o limite não existe, mas mesmo assim escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ Dizer que o limite de f quando x tende a a é ∞ significa dizer que quanto mais perto x fica de a, "$f(x)$ fica mais perto do infinito" ou que "$f(x)$ ultrapassa qualquer número real grande". A rigor, significa que para cada número real grande, digamos G, existe um número $x \in Dom(f)$ próximo de a tal que $f(x) > G$.

EXERCÍCIOS

1) Quando x tende para ∞, para onde tende x^3?

2) Quando x tende para ∞, para onde tende $\sqrt{x}$?

3) Quando x tende para ∞, para onde tende $\frac{100}{x}$?

4) Calcule os limites:

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

b)

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

c)

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}.$$

d)

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 1}.$$

e)

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x}{x + 1}.$$

f)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1}.$$

g)

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{x + 1}.$$

h)

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - \sqrt{2}x^2 - 4x + 4\sqrt{2}}{x + 2}.$$

Respostas das questão 4:

a) 4 b) -4 c) 1 d) 2 e) 2 f) 6 g) 18 h) $8 + 4\sqrt{2}$

2.5 PROPRIEDADES DE LIMITES

Estão exibidas abaixo algumas propriedades dos limites.

Considere b e c dois números reais fixos, e n um número inteiro positivo. Então valem as seguintes propriedades:

1) $\lim_{x \to c} b = b$.

2) $\lim_{x \to c} x = c$.

3) $\lim_{x \to c} x^n = c^n$.

4) $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

5) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$. Se n for par então c deverá ser positivo.

A propriedade 1 diz que a função constante igual a b tem limite b, quando x tende para o número c.

A propriedade 2 diz que a função $f(x) = x$ tem limite c, quando x tende para o número c. Isso é o mesmo que perguntar: "Sabendo que x tende para c, para onde tende x?"

Sabendo que x tende para c, para onde tende $x^2 = x.x$? A resposta é para $c^2 = c.c$.

A propriedade 3 diz que a função $f(x) = x^n$ tem limite c^n quando x tende para o número c.

Estão exibidas abaixo algumas operações com limites que serão utilizadas daqui em diante.

Considere b e c números reais, n um número inteiro positivo, e f e g funções que possuam os seguintes limites:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

e

$$\lim_{x \to c} g(x) = K.$$

Então valem as seguintes operações:

1)

$$\lim_{x \to c} bf(x) = b \lim_{x \to c} f(x) = bL.$$

2) $$\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + K.$$

3) $$\lim_{x \to c}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} f(x). \lim_{x \to c} g(x) = L.K.$$

4) $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{K},$$

sempre que $k \neq 0$

5) $$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n = L^n.$$

6) $$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Não demonstraremos nenhuma dessas operações aqui, mas para melhor fixação vamos discuti-las um pouco:

1) A operação 1 significa que podemos "tirar o número b de dentro do limite". É importante que o aluno faça perguntas do tipo:

Sabendo que $f(x)$ tende para L quando x tende para c, pergunta-se:

a) para onde tende $2f(x)$? A resposta é para $2L$.

b) para onde tende $\sqrt{2}f(x)$? A resposta é para $\sqrt{2}L$. Observe que L está fora da raiz quadrada.

c) para onde tende $\pi f(x)$? A resposta é para πL.

2) A operação 2 diz que o limite de uma soma de funções é a soma dos limites das funções. Como exemplo, temos

$$\lim_{x \to 3}[x^2 + x^3] = \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} x^3 = 9 + 27 = 36.$$

3) A operação 3 diz que o limite de um produto de funções é o produto dos limites das funções. Como exemplo, temos

$$\lim_{x \to 3}[x^2.x^3] = \lim_{x \to 3} x^2. \lim_{x \to 3} x^3 = 9.27 = 243.$$

4) A operação 4 diz que o limite de uma razão de funções é a razão dos limites das funções, desde que o limite do denominador seja não-nulo. Como exemplo, temos

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{2-x^3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2}{\lim\limits_{x\to 3}[2-x^3]}=\frac{9}{-25}=\frac{9}{25}.$$

- EXEMPLO 1: Encontre o limite do polinômio do segundo grau $3x^2+5x+\sqrt{2}$ quando x tende para -1.

Resolução:

$$\lim_{x\to -1}[3x^2+5x+\sqrt{2}]=\lim_{x\to -1}3x^2+\lim_{x\to -1}5x+\lim_{x\to -1}\sqrt{2}=$$

$$3\lim_{x\to -1}x^2+5\lim_{x\to -1}x+\lim_{x\to -1}\sqrt{2}=3-5+\sqrt{2}=-2+\sqrt{2}$$

- EXEMPLO 2: Encontre o limite do polinômio do terceiro grau x^3-4x^2+1 quando x tende para 2.

Resolução:

$$\lim_{x\to 2}[x^3-4x^2+1]=\lim_{x\to 2}x^3-4\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}1=8-4.4+1=-7.$$

Os exemplos acima motivam a seguinte propriedade:

Propriedade

Para calcular o limite de um polinômio $p(x)$ quando x tende a um número c, basta calcular $p(c)$.

- EXEMPLO 3: Encontre o limite do polinômio do terceiro grau $2x^3 - 8x^2 + 2$ quando x tende para 2.

Resolução:

$$\lim_{x\to 2}[2x^3-8x^2+2]=2.2^3-8.2^2+2=14$$

- EXEMPLO 4: Encontre o limite da função racional $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ quando x tende para 2.

Resolução:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}[x^2-9]}{\lim\limits_{x\to 2}[x-3]}=\frac{2^2-9}{2-3}=5$$

Na primeira igualdade acima foi usada a propriedade 4. Observe que o denominador se anula quando $x = 3$. Calcular o limite

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-9}{x-3}$$

Para qualquer número $a \neq 3$ é fácil e basta seguir o exemplo 4. Temos que trabalhar um pouco mais se $a = 3$.

• EXEMPLO 5: Encontre o limite da função racional $\frac{x^2-9}{x-3}$ quando x tende para 3.

Resolução: Lembre-se que $x^2-9=(x-3)(x+3)$ e portanto

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=6.$$

• EXEMPLO 6: Encontre o limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Resolução: Observe que o denominador se anula quando $x = 1$. Esse é um caso de racionalização do denominador. Nós vamos multiplicar a expressão

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

por um número 1 que nos interessa no momento. Nos casos em que aparece a raiz quadrada, usar o conjugado $\sqrt{x}+1$ do denominador costuma ajudar. Multiplicando a expressão $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ pelo número

$$1=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

temos

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\sqrt{x}+1.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}[\sqrt{x}-1]=0.$$

EXERCÍCIOS

1) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -2} x^2 - 4x + 4$

b) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x+2}.$

c) $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x+2}.$

d) $\lim_{x\to 1} (x+2)^5.$

2) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x-2}.$

b) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x-2}.$

Sugestão: Fatorar o numerador.

c) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x+3}.$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}.$

3) Calcule o limite $\lim_{x\to c} [a_1 x + a_0].$

4) Calcule o limite $\lim_{x\to c} [a_2 x^2 + a_1 x + a_0].$

5) Usando as propriedades de limites, mostre que para calcular o limite de um polinômio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ quando x tende a um número c, basta calcular $p(c)$.

6) Diga o domínio, faça o gráfico e calcule o limite quando x tende a 0 de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

2.6 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

A palavra continuidade significa sem interrupção. É costumeiro dizer que uma função de domínio contido em $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ é contínua, se o seu gráfico é desenhado sem tirar o lápis do papel. Isso significa que o seu gráfico não pode ter saltos e nem falhas. A definição de continuidade é:

Definição de continuidade

Dizemos que f é contínua no ponto $c \in (a, b)$ se ocorrerem as seguintes condições:

a) $f(c)$ existir.

b) $\lim_{x \to c} f(x)$ existir e for igual a $f(c)$.

Dentre os gráficos abaixo, quais são os correspondentes a funções contínuas em c?

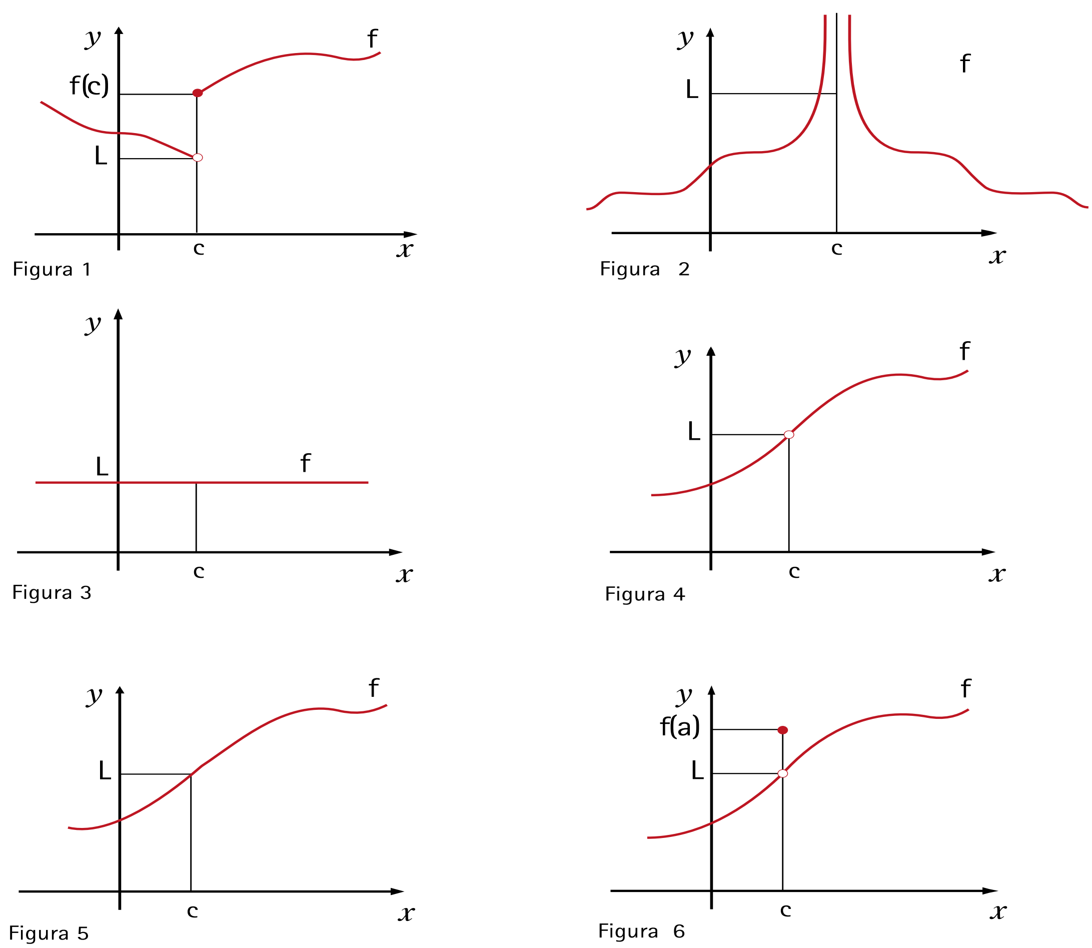


Figura 2.6

Figura 1: O gráfico da figura 1 corresponde a uma função que não é contínua em c. Os limites laterais $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ existem e não são iguais, ou seja, não existe o limite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$. Neste caso dizemos que há um *salto* do gráfico de f no ponto c.

Figura 2: O gráfico da figura 2 corresponde a uma função que não é contínua em c. A função não está definida em c.

Figura 3: A figura 3 é o gráfico de uma função contínua em c.

Figura 4: A figura 4 é o gráfico de uma função descontínua em c. Veja que c não pertence ao domínio de f. Este é o caso em que chamamos de falha.

Figura 5: A figura 5 é o gráfico de uma função contínua em c. Não só contínua em c, mas em todos os pontos do domínio.

Figura 6: A figura 6 é o gráfico de uma função descontínua em c. Neste caso também dizemos que há um *salto* do gráfico de f em c.

Observe ainda que a função contínua da figura 5 tem mesma imagem que as funções descontínuas das figuras 4 e 6, ou seja, existe uma função contínua que substitui a função da figura 4 (ou 6). Por isso diz-se que as descontinuidades das figuras 4 e 6 são removíveis. As descontinuidades das figuras 1 e 2 são não removíveis.

Exemplos:

a) Se $p(x)$ é um polinômio então $\lim\limits_{x\to c^+} p(x) = p(c)$ e, portanto todo polinômio é contínuo.

b) Se $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, ou seja, $r(x)$ é uma função racional, então

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} p(x)}{\lim\limits_{x\to c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Se $q(c) \neq 0$ e portanto a função racional r é contínua em todos os pontos a tais que $q(c) \neq 0$

• EXEMPLO: Discuta a continuidade da função $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ dizendo o domínio, os pontos de continuidade e os pontos de descontinuidade.

Solução: O domínio da função racional $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ é o subconjunto dos números reais em que o denominador é diferente de zero, isto é, o domínio de f é igual a $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$. Portanto os pontos de descontinuidade de f são -1 e 1. Em qualquer outro ponto a função f é contínua. O gráfico de f é o abaixo, onde observa-se que 1 é uma descontinuidade removível enquanto -1 não é removível.

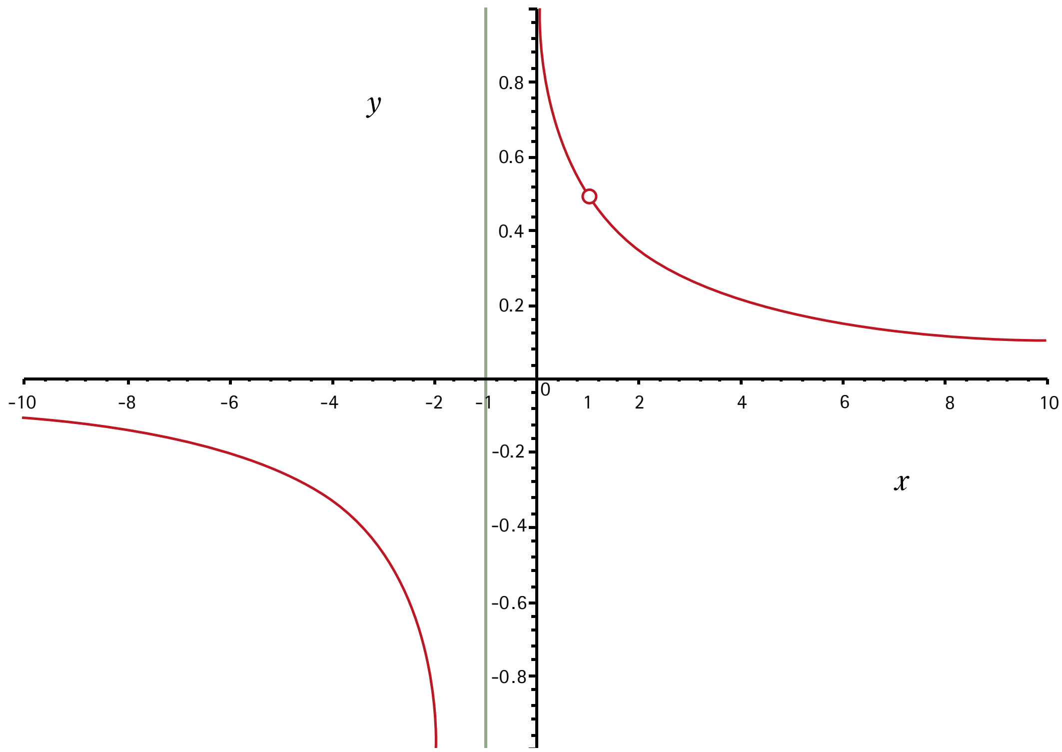


Figura 2.7

Continuidade nos extremos de um intervalo fechado

Há casos em que a função f está apenas definida em um intervalo fechado, ou que necessitamos restringir uma função f a um intervalo fechado $[a,b]$. Nestes casos, a continuidade em um ponto $c \in (a,b)$ é a mesma que a discutida anteriormente, mas para $c = a$ ou $c = b$ a continuidade é limitada a exigência de que $f(c)$ seja igual ao limite lateral. Para ser claro, diz-se que f é contínua no ponto a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

e diz-se que f é contínua no ponto b se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

• EXEMPLO: A função raiz quadrada de x é uma função com domínio $[0,\infty)$ e contínua em 0, pois

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}.$$

EXERCÍCIOS

1) Discuta a continuidade das funções abaixo, dizendo o domínio, os pontos de continuidade, os pontos de descontinuidade (removíveis e não removíveis).

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$.

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2x+3}$.

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$.

f) $f(x) = \sqrt{x-2}$.

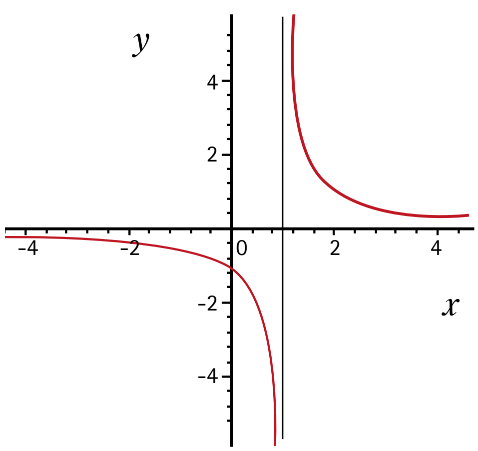
g) $f(x) = \sqrt{2-x}$.

h) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

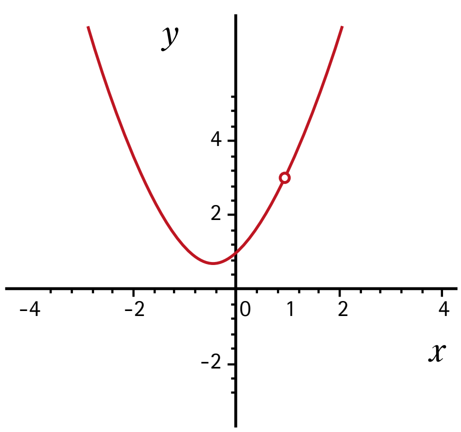
$$f(x) = \begin{Bmatrix} 2-x, -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1.0 \leq x < 2 \end{Bmatrix}$$

Nos exercícios abaixo, descreva os intervalos em que a função é contínua.

2) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

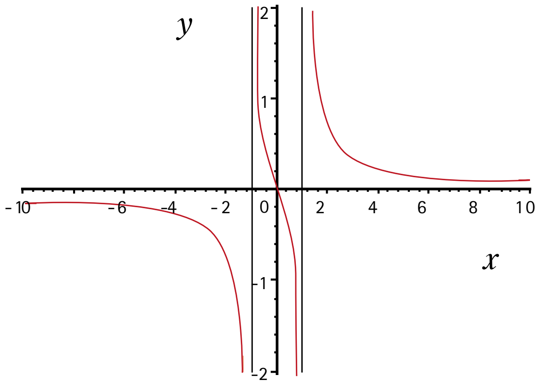


3) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

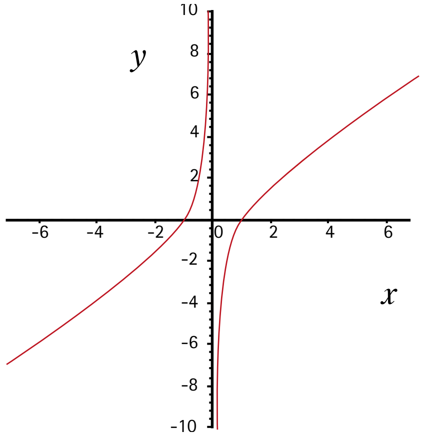


EXERCÍCIOS

4) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$



5) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$



2.7 TEOREMA DO SANDUÍCHE

O teorema do sanduíche consiste em afirmar que, se uma função está limitada por outras duas funções que possuem mesmo limite, quando x tende a um número c, então a função que está entre as duas também tem o mesmo limite.

Para tratar do teorema do sanduíche ou do confronto, nós precisamos tratar do teorema da comparação.

Você acredita que se uma função contínua é positiva em um ponto c então ela é positiva em um intervalo em torno de c? E se retirarmos a palavra contínua, você ainda acredita? A resposta correta para a primeira pergunta é sim enquanto que para a segunda é não. Deixamos como exercício, encontrar uma função f descontínua em c tal que $f(c) > 0$ mas f não é positiva em um intervalo em torno de c.

O teorema da comparação é baseado no fato de que se o $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ então existe um intervalo I em torno de c tal que $f(x) > 0$ para $x \in I$. Isto implica que se o limite da diferença entre duas funções é positivo

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] > 0$$

então existe um intervalo I em torno de c tal que $f(x) - g(x) > 0$ para $x \in I$.

Teorema da comparação:

Sejam f e g duas funções com mesmo domínio e c um ponto do domínio. Se os limites de f e g, quando x tende a c, existem e $f(x) \leq g(x)$ para todo x do domínio então

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

O contrário seria um absurdo. Se a desigualdade $\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x)$ fosse verdadeira, então existiria um intervalo I em torno de c tal que $f(x) > g(x)$, para todo $x \in I$.

Teorema

Sejam f e g duas funções com mesmo domínio e c um ponto do domínio. Se $|f(x)| \leq K$ para todo x do domínio e $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ então

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0 .$$

Teorema do Sanduíche

Sejam f, g e h três funções com mesmo domínio tais que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x pertencente ao domínio. Seja c um ponto do domínio. Se os limites de f e g, quando x tende a c existem e são iguais a L então o limite de h, quando x tende a c, existe e também é igual a L.

O gráfico abaixo mostra uma função h entre as funções f e g.

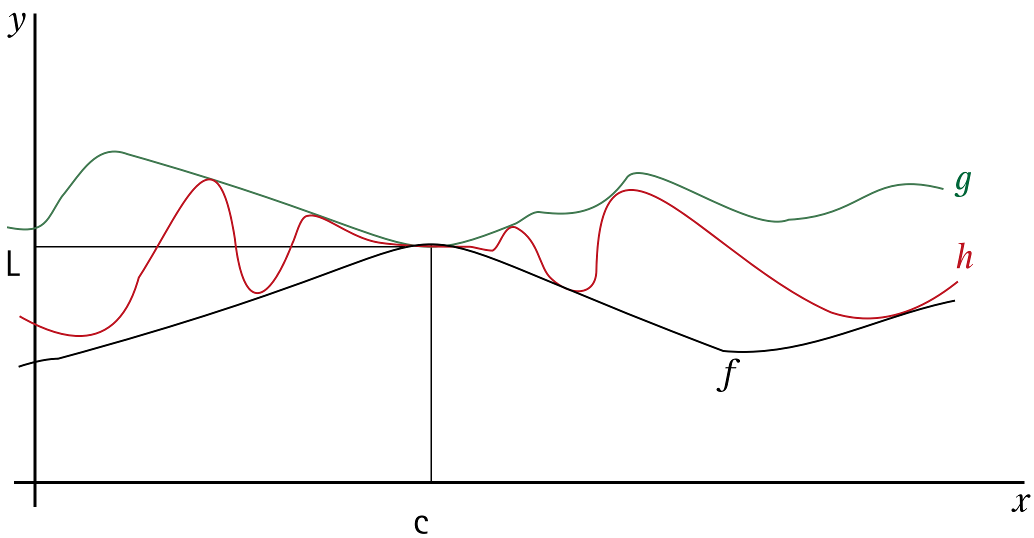


Figura 2.8

Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a,b)$, então

$$L = \lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} h(x) \leq \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

E, portanto

$$\lim_{x\to c} h(x) = L.$$

Um exemplo clássico que demonstra o uso do Teorema do Sanduíche é o seguinte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}$$

A função seno é uma função trigonométrica. É importante que neste momento você esteja familiarizado com as razões e as funções trigonométricas, pois serão utilizadas freqüentemente no seu curso. Uma breve abordagem sobre a Trigonometria é feita no Apêndice deste fascículo.

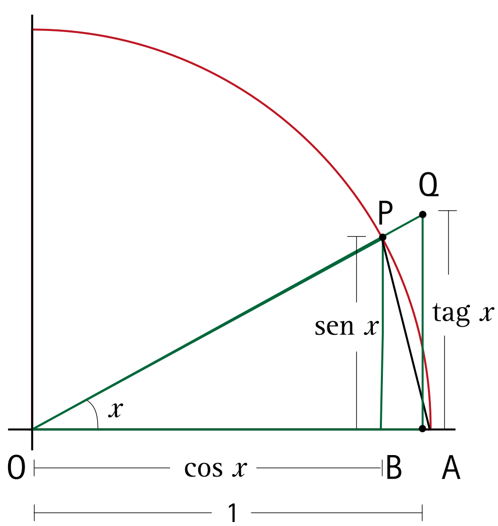
Não deixe de estudá-lo, para que possamos prosseguir em sucesso.

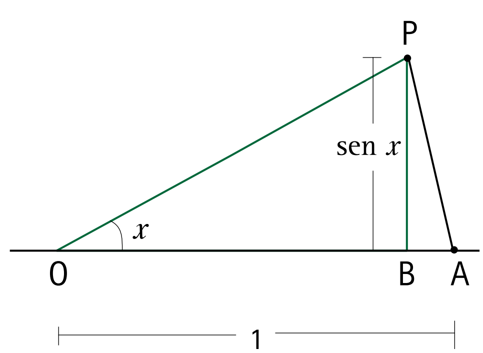
Depois que você fizer a revisão de Trigonometria, fica como exercício mostrar que $\lim_{x\to 0} \text{sen}x = 0$ e que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. Convidamos você agora a pensar sobre o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}$. Se $\text{sen}x$ tende a 0, quando x tende a 0, para onde tende a razão?

• EXEMPLO 1: Mostremos, usando o teorema do Sanduíche, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

Voltemos ao círculo trigonométrico de raio 1. Para todo x que satisfaça $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, o comprimento de PB = sen$x$, o comprimento de OB = cos$x$ e o comprimento de OA = 1. Como o triângulo OAQ é um triângulo retângulo, $\text{tg}x = \frac{A}{1} = QA$ Faça S_{OAP} = área do triângulo OAP, Se_{OAP} = área do setor circular OAP, S_{OAQ}= área do triângulo OAQ. Valem as desigualdades $S_{OAp} < Se_{OAP} < S_{OAQ}$.





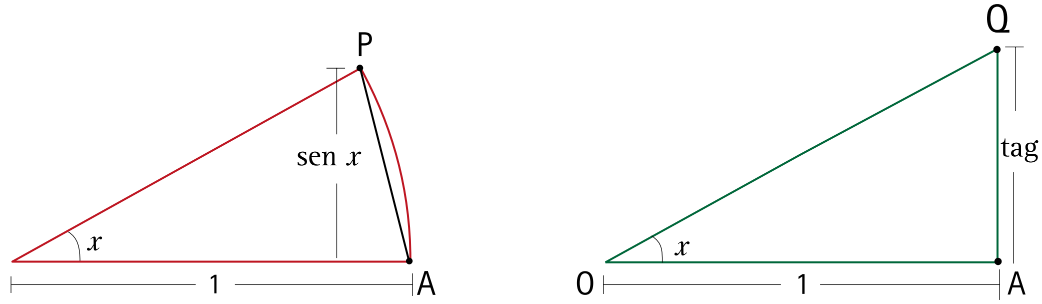


Figura 2.9

Sabendo que a área de um triângulo é igual a metade do produto entre a base e a altura, então $S_{OAP} = \frac{1}{2}.(1)\text{sen}x = \frac{\text{sen}x}{2}$, $Se_{OAP} = \frac{1}{2}.1^2.x = \frac{x}{2}$, e $S_{OAQ} = \frac{1}{2}.(1).\text{tg}x = \frac{\text{tg}x}{2}$. Logo,

$$\frac{\text{sen}x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\text{sen}x}{\cos x}.$$

Multiplicando por $\frac{2}{\text{sen}x}$ temos

$$1 < \frac{x}{\text{sen}x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Use agora o fato de que $a < b$ implica que o inverso $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, para obter

$$\cos x < \frac{\text{sen}x}{x} < 1.$$

As argumentações acima foram feitas usando que $x > 0$. Para os limites em que x tende a 0, devemos analisar para $x > 0$ e $x < 0$. Para $x < 0$ também é verdadeira. Basta ver que $\cos(-x) = \cos x$ e $\text{sen}(-x)$. Se $x < 0$ então $-x > 0$ e

$$\frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Podemos agora aplicar o teorema do sanduíche e concluir que

$$1 = \lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} < \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

E portanto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

• EXEMPLO 2: Encontre o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 3x}{x}.$$

Solução:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 3x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \frac{\text{sen} 3x}{3x} = 3 \lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen} 3x}{3x} = 3.1 = 3.$$

EXERCÍCIOS

1) Mostre que:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$ Sugestão: Use que $\operatorname{sen} x$ é limitada entre -1 e 1 e aplique o teorema do sanduíche.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$ Sugestão: Verifique que $\frac{1-\cos x}{x} = \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$ e aplique o limite.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$ Sugestão: use que $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$ e aplique o teorema do sanduíche.

2) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$. R: 5

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{4x}$. R: 5/4

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{7\operatorname{sen} x}$. R: 3/7

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$. R: 0

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$. R: 1/4

f) $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x.$. R: 1. A cotangente de x é definida por $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} x \csc x.$ R: 1. A cossecante de x é definida por $\csc x \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x}$. R: 0.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{5x}$. R: 0.

2.8 TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Se um carro partiu da velocidade zero km/h e, após 2 km, está na velocidade 80 km/h, então, em algum ponto do trajeto nesses 2km, o carro atingiu a velocidade de 53,5 km/h.

A propriedade acima é freqüentemente usada para motivar o teorema do valor intermediário para funções contínuas o que diz que qualquer valor K, entre duas imagens da função, também está na imagem da função.

Teorema

Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) < K < f(b)$, então existe pelo menos um número $c \in (a,b)$ tal que $K = f(c)$.

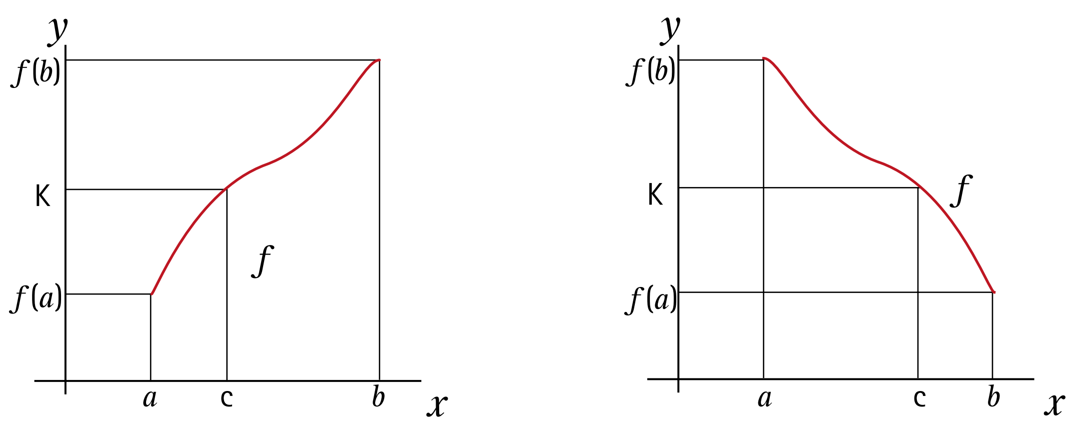


Figura 2.10

• EXEMPLO 1: Seja f uma função contínua em $[a,b]$. Se $f(a) < 0 < f(b)$ então existe algum $c \in (a,b)$ tal que $0 = f(c)$. Dizemos neste caso, que c é o zero da função f.

Você deve pensar o seguinte: se o gráfico de uma função contínua tem um ponto acima e um ponto abaixo do eixo-x, então, por ser contínua, tem um ponto no eixo-x.

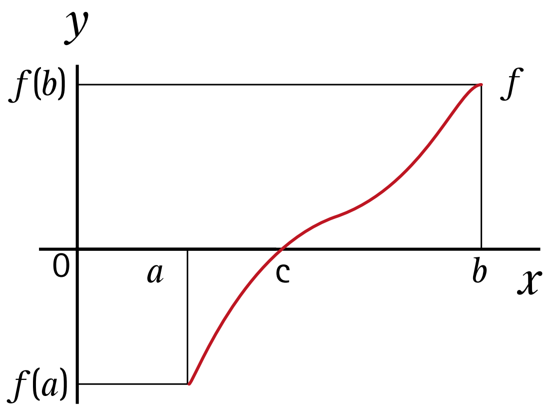


Figura 2.11

Nem todos os polinômios de grau par se anulam em algum ponto do eixo-x. No exemplo abaixo, mostramos uma alternativa para o caso de haver dúvidas.

• EXEMPLO 2: Seja $f(x)=x^4-x-1$. Mostre que existe um número $c \in (-1,1)$ que é zero de f.

Não é imediato que f se anula em algum ponto. Observe que $f(-1) = 1$ e $f(1) = -1$. Pelo teorema do valor intermediário existe $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = 0$.

EXERCÍCIOS

1) Utilize o teorema do valor intermediário, para mostrar que existe um zero da função dada no intervalo dado.

a) $f(x)=2x^3-3x^2+1$; [-1,0].

b) $f(x)=x^5+4x^4+1$; [-5,-4].

c) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x + \frac{1}{2}; [0, \frac{\pi}{6}]$.

2) Utilize o teorema do valor intermediário, para mostrar que existe uma solução para a equação dada no intervalo dado.

a) $-x^3 + 2x^2 - 1 = 0; [-1, 0]$ e (1,2).

b) $-x^5 + 2x^2 - 1 = 0; [-1, 0]$.

c) $\operatorname{sen} x - 2\cos x + \frac{1}{2} = 0; [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

d) $2\tan x - x = 1; [0, \frac{\pi}{4}]$.

e) $x^3 = \sqrt{x+2}; [1, 2]$.

3) A temperatura T (em graus Celsius) na qual a água ferve depende da altitude (h medida em metros, acima do nível do mar). A fórmula

$$T(h) = 100,862 - 0,0415\sqrt{h + 431,03}$$

fornece aproximadamente o valor de T como uma função de h. Utilize o teorema do valor intermediário, para mostrar que a água ferve a 98 graus Celsius quando em altitude entre 4.000 e 4.500 metros.

3. DERIVADA

3.1 INTRODUÇÃO

Conforme menciona Anton (2000, p.170), são muitos os fenômenos físicos envolvendo grandezas que variam como, por exemplo, a velocidade de um foguete, a inflação da moeda, a taxa de crescimento diário da área de uma vitória-régia.

O conceito de Derivada que vamos estudar agora nos dá ferramentas matemáticas suficientes, para serem estudadas as taxas nas quais variam as grandezas físicas.

De acordo com Eves (2004, p.417), o desenvolvimento histórico do Cálculo deu-se na ordem contrária àquela que encontramos nos livros-textos e nos cursos básicos que estudamos, como este de Cálculo I que você está cursando.

O conceito de diferenciação (ou de derivação) surgiu após a criação do cálculo integral. A idéia de integração originou-se em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. Já a diferenciação é um processo resultante de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos.

A maior riqueza dessa história foi a constatação posterior de que a integração e a diferenciação têm relação direta, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

3.2 RETA TANGENTE A UMA CURVA

Normalmente, entendemos a derivada de uma função f em um ponto x_0 do domínio como o limite, quando x tende a x_0, do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f. Vê-se que, para estudarmos a derivada de uma função, precisaremos usar o conceito de coeficiente angular (ou inclinação) da reta tangente ao gráfico de f.

Para os alunos do ensino médio, o professor de matemática diz que uma reta tangente a uma circunferência em um ponto P da circunferência é a reta que toca a circunferência em único ponto.

Observe essa idéia na figura abaixo:

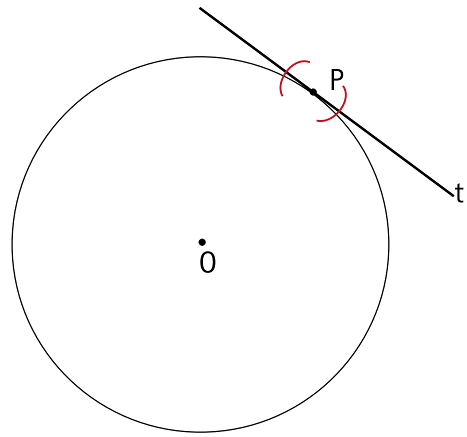


Figura 3.1

Não há nada de errado na afirmação do professor, mas você poderia perguntar o seguinte: o que é uma reta tangente a uma curva qualquer? Veremos abaixo a definição de reta tangente a uma curva em um ponto P, mas podemos pensar intuitivamente como a reta que "melhor se aproxima da curva no ponto P".

A reta tangente, pelo fato de ser mais simples do que a curva e de se parecer com a curva na vizinhança do ponto P, tem o papel de substituir a curva em algumas situações. É dessa forma que tornamos alguns problemas complicados mais simples de resolver, substituindo uma função f complicada por uma mais simples, capaz de substituí-la sem muitas perdas.

Pergunta: Qual é a reta que, no ponto P, melhor se aproxima das curvas abaixo?

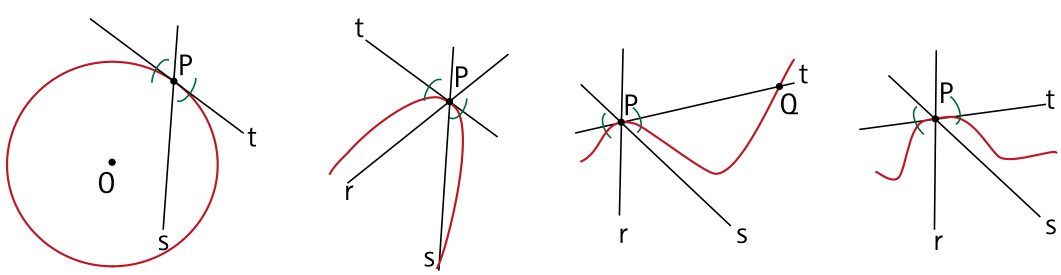


Figura 3.2

Você concorda que é a reta t? De fato, observe que na segunda figura, a reta r toca a curva em único ponto, mas não é a reta que melhor se aproxima da curva, ou seja, não é a reta tangente. Na terceira figura, a reta t é tangente a curva em P, mas não é tangente em Q. Na quarta figura, a reta t coincide com a curva em uma vizinhança do ponto P e é a reta que melhor se aproxima da curva em P.

Qualquer reta que passe pelo ponto P da curva e que não seja a tangente, é chamada de reta secante a curva em P.

Na primeira figura a reta s é secante à curva em P.

3.3 INCLINAÇÃO DE UMA CURVA

A inclinação de uma curva em um ponto P é definida como sendo a inclinação da reta tangente à curva em P.

Para obter a inclinação de uma reta, é necessário ter dois pontos da reta. Digamos que $P(x_0,y_0)$ e $Q(x_1,y_1)$ sejam pontos de uma reta r. Então a inclinação de r é igual a $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$. Definindo a variação em x como sendo $\Delta x = x - x_0$ e a variação em y como $\Delta y = y - y_0$, então a inclinação de r é igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Leia com atenção o exemplo simples abaixo, mas muito importante:

• EXEMPLO 1: Encontre a inclinação do gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Na figura abaixo, você deverá observar a reta tangente t e a reta r secante a curva que passa pelos pontos P e Q de coordenadas

$$P = (x_P, y_P) = (\frac{1}{2},\frac{1}{4})$$

e

$$Q = (x_Q, y_Q) = \left(\frac{1}{2} + \Delta x, \left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2\right).$$

A inclinação da reta r secante é igual a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \Delta x - \frac{1}{2}} = \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 1 + \Delta x.$$

Olhe para a figura abaixo e imagine que você possa mover o ponto Q. O que acontecerá com Δx? Perceba que aproximar o ponto Q ao ponto P significa aproximar a variação Δx do número zero, e que se Δx tender a zero então o ponto Q tende ao ponto P, e mais, a inclinação $(1 + \Delta x)$ da reta secante r se aproximará da inclinação m_t da reta tangente t. Na verdade, vale o seguinte:

$$\lim_{\Delta x \to 0}(1 + \Delta x) = 1 = m_t.$$

Portanto, podemos dizer que a inclinação da reta tangente t ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ é igual a 1.

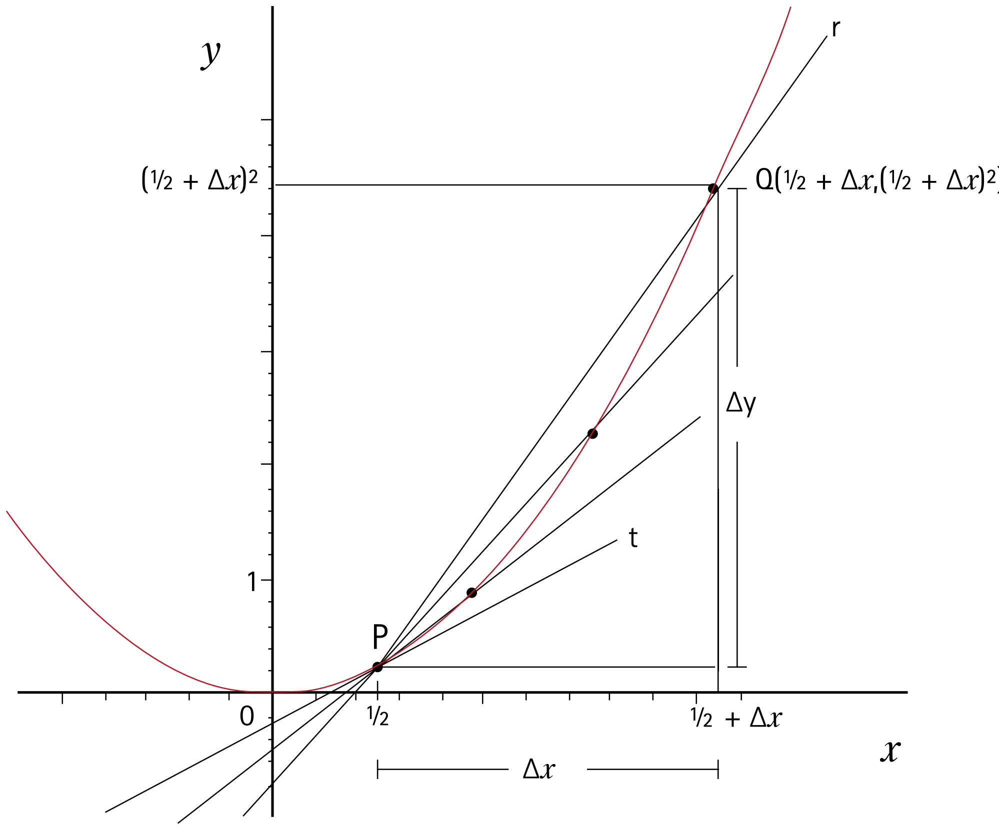


Figura 3.3

• EXEMPLO 2: Encontre a inclinação do gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $(x,\ x^2)$.

Na figura abaixo, você deverá observar a reta tangente t e a reta secante a curva que passa pelos pontos P e Q de coordenadas

$$P = (x_P, y_P) = (x, x^2)$$

e

$$Q = (x_Q, y_Q) = (x + \Delta x, (x + \Delta x)^2).$$

A inclinação da reta secante é igual a

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{x + \Delta x - x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Olhe para a figura abaixo e imagine que você possa mover o ponto Q. O que acontecerá com Δx? Perceba que aproximar o ponto Q ao ponto P significa aproximar a variação Δx do número zero, e que se Δx tender a zero então o ponto Q tende ao ponto P, e mais, a inclinação $(2x + \Delta x)$ da reta secante r se aproximará da inclinação m_t da reta tangente t. Na verdade, vale o seguinte:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x = m_t.$$

Portanto a inclinação da reta tangente t ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (x, x^2) é igual a $2x$.

Como podemos interpretar a afirmação acima?

Por exemplo, (-3,9) é um ponto do gráfico da função $f(x) = x^2$, e, sabendo que a inclinação da reta tangente t ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (x, x^2) é igual a $2x$, podemos então concluir que a inclinação da reta tangente no ponto (-3,9) é igual a 2(-3) = -6.

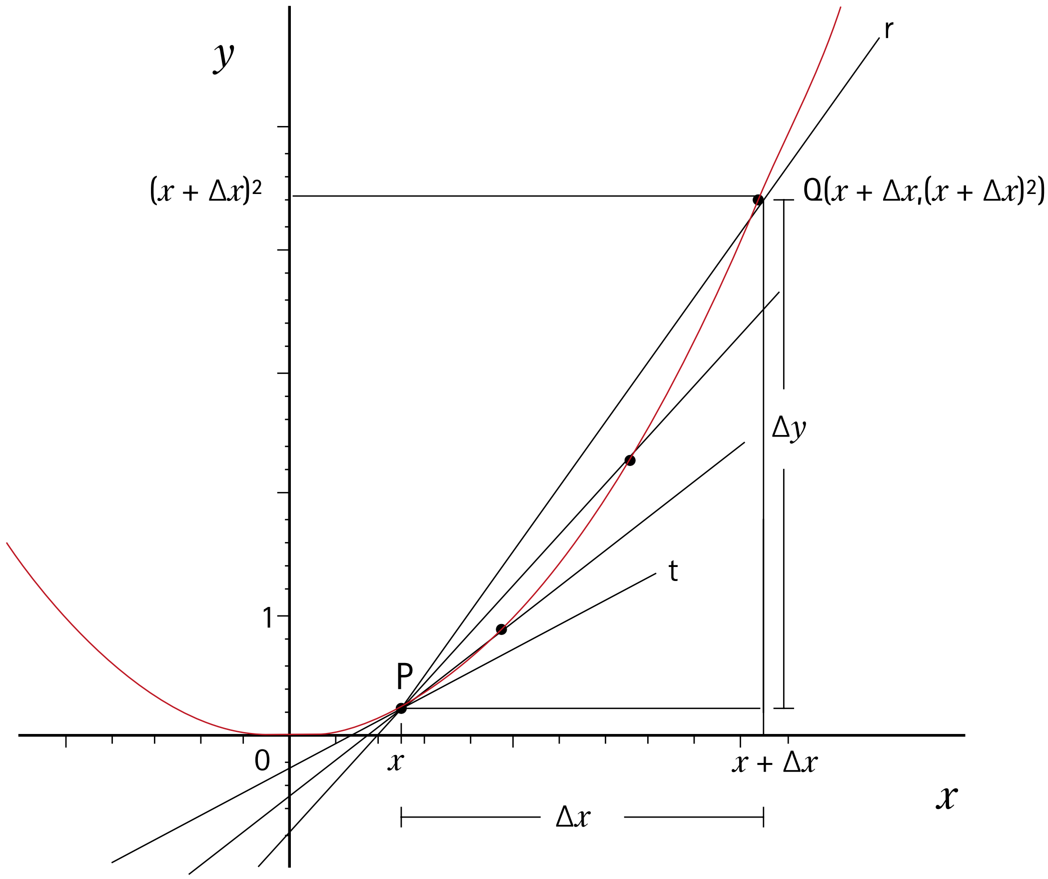


Figura 3.4

Para o gráfico de uma função f qualquer, vale o seguinte:

A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ é dada pelo limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ desde que o limite exista.

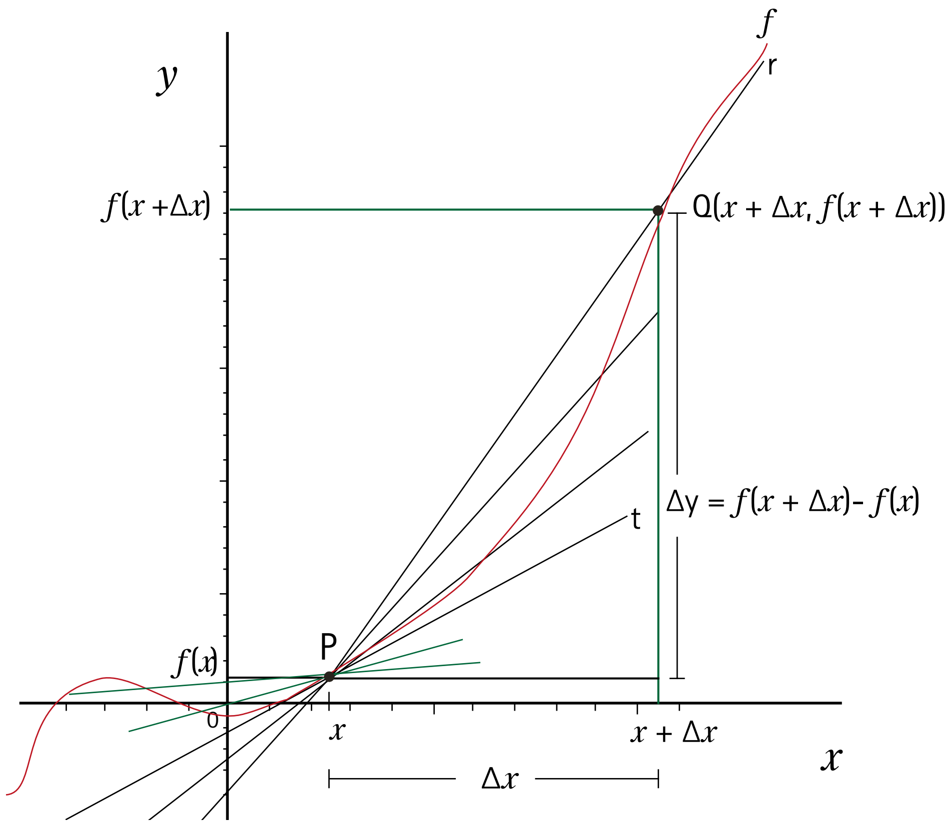


Figura 3.5

Observando a figura acima e a partir da definição dada, podemos visualizar que intuitivamente a reta tangente à curva no ponto $P(x, f(x))$ é obtida tomando um ponto Q da curva, diferente de P e fazendo Q aproximar-se cada vez mais de P. Observe que, fazendo isso, temos que Δx tende a zero. O que acontece, quando fazemos isso, é que a reta secante PQ vai aproximando-se cada vez mais da reta tangente à curva no ponto $P(x, f(x))$.

3.4 O CONCEITO DE DERIVADA

Definição

Uma função f é dita diferenciável (ou derivável) em um ponto x se o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

existir. Se o limite existe, ele é chamado de derivada de f no ponto x e é denotado por $f'(x)$. Costuma-se dizer derivável no lugar de diferenciável.

Embora as figuras mostrem apenas o limite a direita, o limite acima é bilateral, tanto para $\Delta x < 0$ quanto para $\Delta x > 0$. Para efeito de simplificação, usaremos às vezes h no lugar de Δx e a derivada será escrita da forma

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Já vimos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ é dada pelo limite $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ desde que o limite exista. Assim, a partir da definição de uma função f diferenciável em um ponto x, concluímos:

A derivada $f\,'(x)$ é igual à inclinação do gráfico de f no ponto x.

Quando afirmamos que f é diferenciável em um ponto x, estamos encontrando a inclinação da reta tangente em qualquer ponto x real, assumindo que o limite $f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ exista.

O fato é que o processo de encontrar o $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ significa encontrar a derivada da função f no ponto x. E, quando calculamos $f\,'(a)$, estamos determinando a derivada de f no ponto a, ou a inclinação da reta tangente à curva no ponto "a", ou seja, a inclinação da curva em "a".

• EXEMPLO 3: Encontre a derivada da função constante $f(x) = c$ no ponto x.

Resolução:

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Era esperado encontrar a inclinação de uma reta horizontal igual a zero em qualquer ponto x.

Logo, se $f(x) = c$, então $f\,'(x) = 0$.

• EXEMPLO 4: Encontre a derivada de $f(x) = ax + b$ no ponto x.

Resolução: Este exemplo é o mesmo que calcular a inclinação da reta $f(x) = ax + b$ no ponto x. É esperado encontrarmos inclinação a.

Veja que $f(z) = az + b$ e portanto, para $z = x + h$ tem-se $f(x + h) = a(x + h) + b$.

Logo, usando a definição:

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a.$$

Logo, se $f(x) = ax + b$, então $f\,'(x) = a$.

• EXEMPLO 5: Encontre a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto x.

Resolução: No exemplo 2 vimos que inclinação da reta tangente t ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $(x, x)^2$ é igual a $2x$.

Logo podemos afirmar que $f'(x) = 2x$, já que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x representa a derivada de f no ponto x.

• EXEMPLO 6: Encontre a derivada de $f(x) = x^3$ no ponto x.

Resolução: Veja que $f(z) = z^3$ e, portanto, para $z = x + h$ tem-se $f(x + h) = (x + h)^3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Assim, se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$.

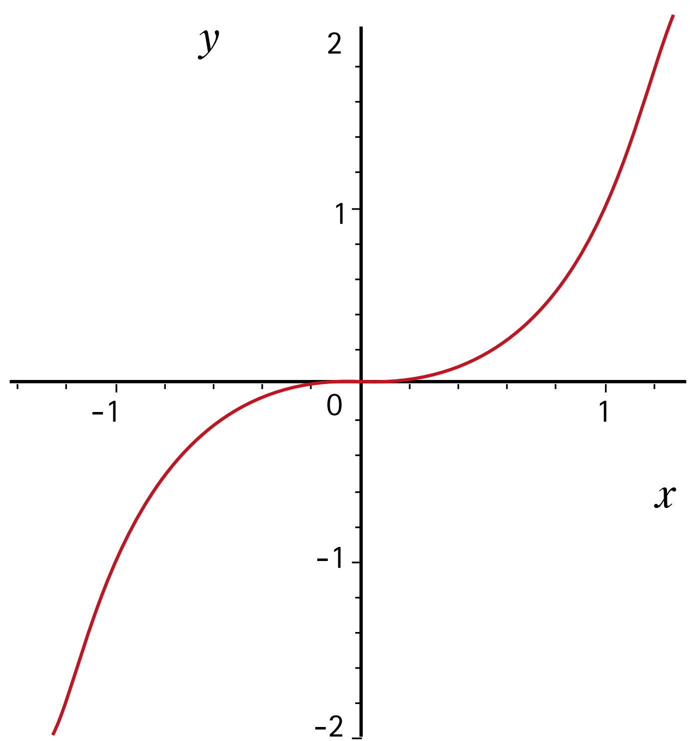


Figura 3.6

Acima está o gráfico de $f(x) = x^3$. Observe que $f'(0) = 0$, ou seja, a reta tangente ao gráfico de x^3 no ponto $x = 0$ é o eixo-x, ou seja, a reta horizontal $y = 0$.

• EXEMPLO 7: Encontre a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto x.

Resolução: Observe que se x é um número real do domínio da função então $x \geq 0$ e

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.1 = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} . \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} . \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Então, se $f(x) = \sqrt{x}$, então $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Abaixo está o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$. Observe que o limite acima, para $x = 0$ é igual a ∞ e que a reta tangente ao gráfico de $\sqrt{x}$ é o eixo-y, ou a reta vertical $x = 0$.

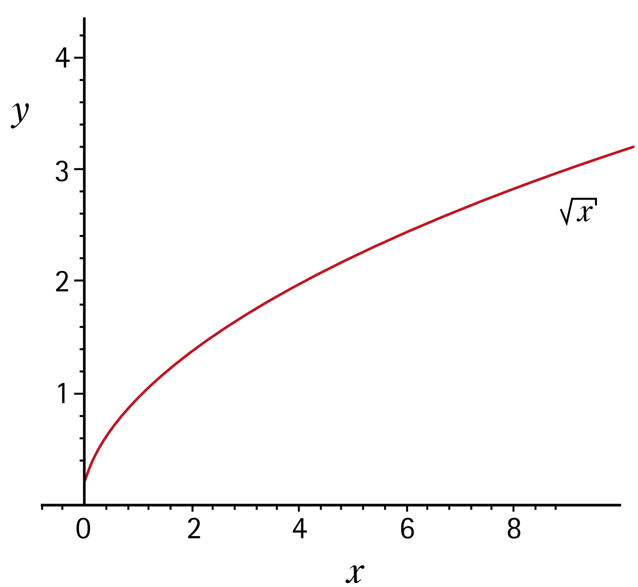


Figura 3.7

• EXEMPLO 8: Encontre a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto x.

Resolução: Observe que se x é um número real do domínio da função então $x \neq 0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}.$$

Assim, se $f(x)=\frac{1}{x}$ então, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

- EXEMPLO 9: Encontre a derivada de $f(x)=x^2+x+\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ no ponto x.

Resolução: Usando a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites, temos

$$f'(x)=2x+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}.$$

EXERCÍCIOS

1) Encontre a derivada no ponto x das funções:

a) $f(x) = x^4$. Resposta: $4x^3$

b) $f(x) = 3$. Resposta: 0

c) $f(x) = 3x + 3$. Resposta: 3

d) $f(x) = 3x^2$. Resposta: $6x$.

e) $f(x) = 5x^3$. Resposta: $15x^2$

f) $f(x) = \frac{7}{x}$ .Resposta: $-\frac{7}{x^2}$

g) $f(x) = 3\sqrt{x}$. Resposta: $\frac{3}{2\sqrt{x}}$

h) $f(x) = 5x^2 - 5x + 2 - \frac{3}{x} - 7\sqrt{x}$ .Resposta: $10x - 5 - \frac{3}{x^2} - \frac{7}{2\sqrt{x}}$

2) Encontre a inclinação da função abaixo no ponto x indicado:

a) $f(x) = x^4$ em $x = 2$. Resposta: $4.2^3 = 32$

b) $f(x) = 3$ em $x = 1$. Resposta: 0

c) $f(x) = 3x + 3$ em $x = -1$. Resposta: 3

d) $f(x) = 3x^2$ em $x = -1$. Resposta: $6(-1) = -6$

e) $f(x) = 5x^3$ em $x = -2$. Resposta: $15(-2)^2 = 60$

f) $f(x) = \frac{7}{x}$ em $x = -1$. Resposta: $\frac{7}{(-1)^2} = -7$

g) $f(x) = 3\sqrt{x}$ em $x = 1$. Resposta: $\frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$

h) $f(x) = 5x^2 - 5x + 2 - \frac{3}{x} - 7\sqrt{x}$ em $x = 2$. Resposta: $\frac{63-7\sqrt{2}}{4}$.

3) De acordo com a figura abaixo, diga se a derivada no ponto x existe e, se existe, diga qual é a derivada.

a) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ em $x = 2$

b) $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ em $x = 2$

c) $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ em $x = \frac{1}{2}$

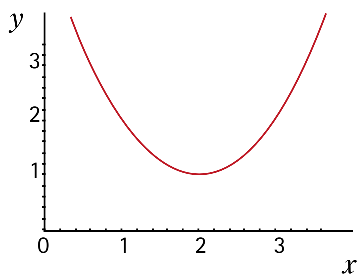


Figura a

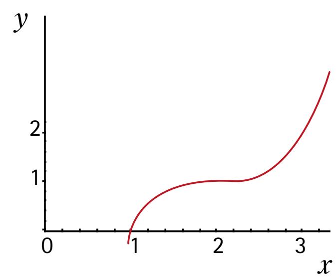


Figura b

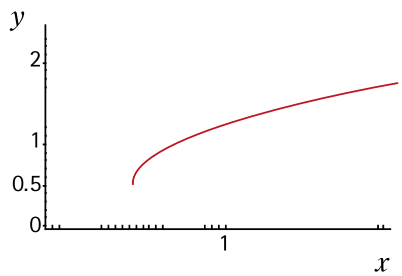


Figura c

4) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado, faça o gráfico da função e da reta tangente num mesmo sistema cartesiano:

Veja o exemplo primeiro: Seja $f(x) = x^4$ e o ponto $x = 2$.

Solução: $f'(x) = 4x^3$ e, portanto a inclinação da reta tangente em $x = 2$ é $f'(2) = 4.2^3 = 32$. A equação de uma reta de inclinação m e que passa pelo ponto (x_0, y_0) é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$. Como a reta tangente passa pelo ponto (2,16) então sua equação é

$$y - 16 = 32(x - 2).$$

EXERCÍCIOS

a) $f(x) = 3x^2$ em $x = -1$.

Resposta: $y - 3 = -6(x + 1)$.

b) $f(x) = \frac{7}{x}$ em $x = -1$

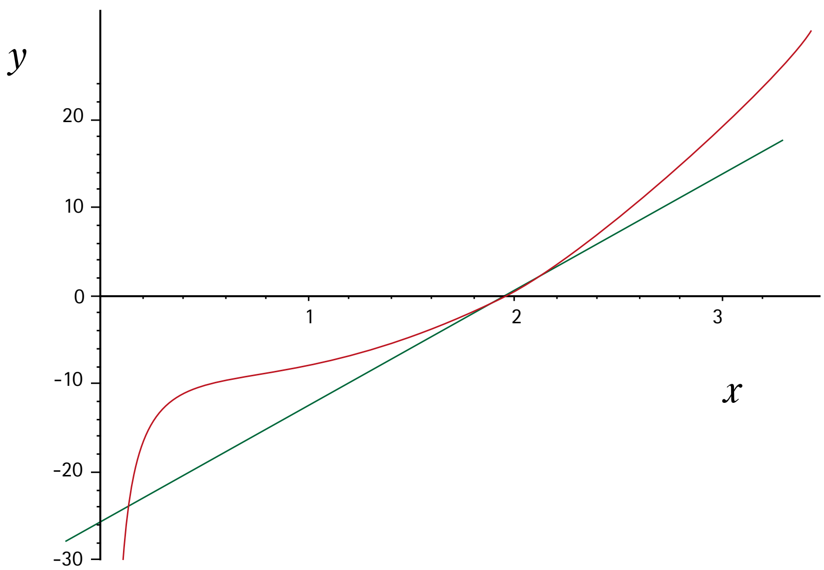
Resposta: $y + 7 = -7\,(x + 1)$.

c) $f(x) = 3\sqrt{x}$ em $x = 1$.

Resposta: $y - 3 = \frac{3}{2}(x - 1)$.

d) $f(x) = 5x^2 - 5x + 2 - \frac{3}{x} - 7\sqrt{x}$ em $x = 2$. Veja abaixo o gráfico dessa função.

Resposta: $y - \frac{21}{2} - 7\sqrt{2} = \frac{63 - 7\sqrt{2}}{4}(x - 2)$.



3.5 DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

Nesta seção exibiremos funções contínuas, mas que não são diferenciáveis, e veremos ainda que a diferenciabilidade de uma função em um ponto implica a continuidade da função no mesmo ponto.

Quando uma função é diferenciável em um ponto x, isso significa que a mudança de direção da curva ocorre suavemente. Quando existem mudanças bruscas de direção em um ponto então, não há diferenciabilidade da função naquele ponto. Veremos isso abaixo com a função modular no ponto $x = 0$.

Uma função f de domínio no intervalo I e contradomínio $\mathbb{R}$ é dita diferenciável no ponto $x \in$ I se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existir. O limite acima existirá se, e somente se, os limites laterais à esquerda e à direita existirem e forem iguais. Esse limite lateral à esquerda é chamado de derivada á esquerda de f e denotado por f'_-, enquanto o limite à direita é chamado de derivada à direita de f é denotado por f'_+. Portanto uma função f será diferenciável em um ponto x, se os limites

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existirem e forem iguais.

O exemplo abaixo apresenta uma função contínua que não é diferenciável:

- EXEMPLO: A função modular definida por

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é contínua mas não é diferenciável em $x = 0$. Veja abaixo o gráfico desta função.

De fato: Para ver que é contínua em $x = 0$ basta analisar os limites laterais

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0, \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

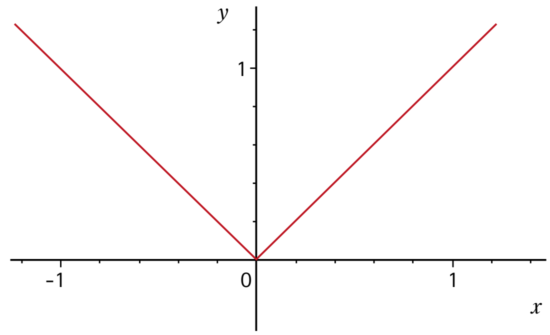


Figura 3.8

Uma função f de domínio no intervalo I e contradomínio $\mathbb{R}$ é dita diferenciável no intervalo I se for diferenciável em todo ponto $x \in$ I.

Para ver que não é diferenciável em $x = 0$, veja que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

e

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1.$$

As derivadas laterais existem, mas não são iguais e, portanto, não existe o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Os pontos em que o gráfico de f tem tangentes verticais ou que as mudanças de direção são bruscas do tipo "bicos", são pontos em que f não é derivável. Veremos mais abaixo que nos pontos de descontinuidade a função também não é derivável. Veja mais alguns exemplos de funções que não são deriváveis em $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & se\ x \le 0 \\ x^2, & se\ x > 0. \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1, & se\ x \le 0 \\ -1, & se\ x > 0. \end{cases}$$

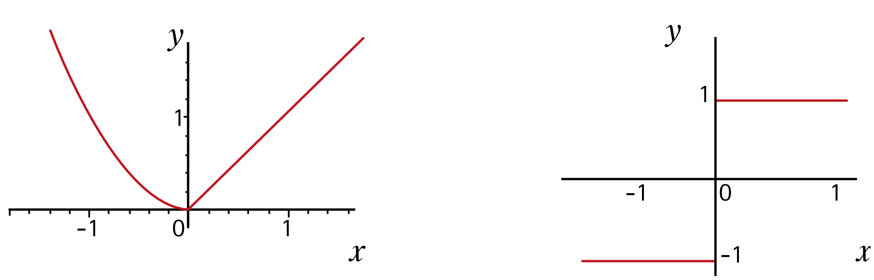


Figura 3.9

O gráfico da função f acima tem um bico em $x = 0$, enquanto g tem uma descontinuidade do tipo salto.

Teorema

Se uma função f é diferenciável em x então f é contínua em x.

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $h \neq 0$ tal que $x + h$ esteja no domínio de f, temos

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.h.$$

Se f é diferenciável em x então

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f\,'(x)$$

E, portanto

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \lim_{h \to 0} h = f\,'(x). \lim_{h \to 0} h = f\,'(x).0 = 0.$$

Daí

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

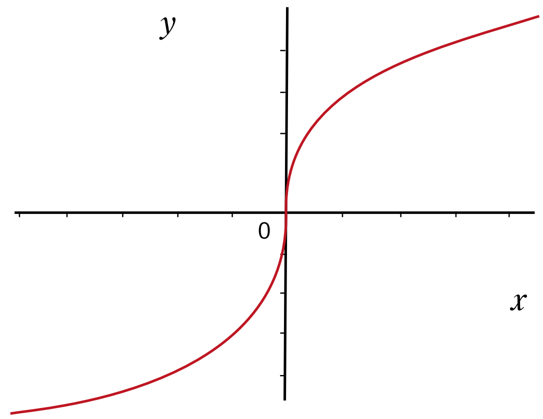
o que mostra que f é contínua em x.

Este teorema diz que "f é diferenciável em x" implica a frase "f é contínua em x". A recíproca não é verdadeira, como visto nos exemplos função modular e raiz cúbica acima.

Se uma frase A implica uma frase B, então a negação da frase B implica a negação da frase A. Para o teorema em questão, isso significa que o teorema é equivalente a dizer que a frase "f é descontínua em x" implica "f não é diferenciável em x".

EXERCÍCIOS

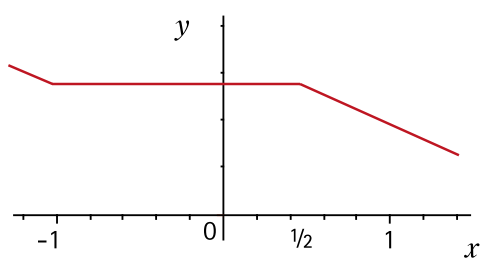
1) Mostre que a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cujo gráfico está abaixo, é contínua, mas não é diferenciável em $x = 0$.

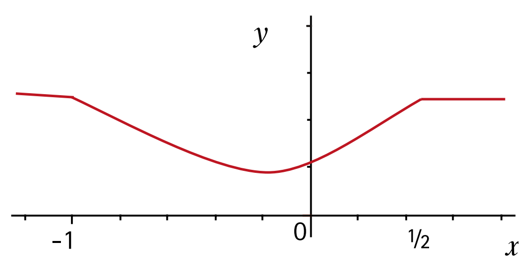


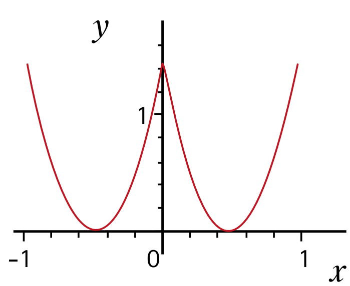
2) Qual é o maior número inteiro menor do que 2,14? Qual é o maior número inteiro menor do que -2,14? Respostas: 2 e -3.

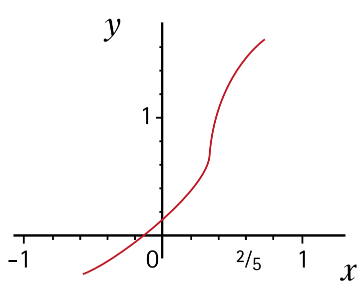
3) A função maior inteiro de x é definida como sendo o maior número inteiro menor do que x e denotada por $[\![x]\!]$. Faça o gráfico da função maior inteiro e analise os pontos de descontinuidade e derivabilidade.

4) Analise os gráficos abaixo e indique em quais pontos a função não é derivável.









3.6 OPERAÇÕES COM DERIVADAS

Nesta seção serão mostradas algumas operações entre derivadas, tais como derivada de somas, produtos e quocientes de funções, que permitirão calcular com maior segurança e rapidez a derivada de expressões do tipo $\frac{x}{x^2-5x+1}$.

Já vimos nos exemplos anteriores que:

a) A derivada de $k(x) = c$ é $k'(x) = 0$.

b) A derivada de $f(x) = ax + b$ é $f'(x) = a$.

c) A derivada de $g(x) = x^2$ é $g'(x) = 2x$.

d) A derivada de $h(x) = x^3$ é $h'(x) = 3x^2$.

e) A derivada de $l(x) = \frac{1}{x}$ é $l'(x) = \frac{1}{x^2}$.

f) A derivada de $r(x) = \sqrt{x}$ é $r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Por simplicidade, às vezes escreveremos $(ax + b)' = a$ ou $(x^2)' = 2x$ para explicitar a derivada do que está dentro do parênteses. A igualdade $(x)' = 1$ é um caso particular do item b.

OPERAÇÕES: Se f e g são duas funções diferenciáveis em um mesmo domínio, então:

1) $(af(x))' = af'(x)$ para a real.

2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

3) $(x^n)' = nx^{n-1}$ para n real.

Demonstração de 1):

$$
\begin{aligned}
(af(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)-af(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a[f(x+h)-f(x)]}{h} \\
&= a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = af'(x).
\end{aligned}
$$

Demonstração de 2):

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

Demonstração de 3): para a demonstração desta propriedade, será usado o binômio de Newton em que para n inteiro positivo,

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}h^k + \cdots \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n,$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Portanto a demonstração que será dada aqui, justifica a igualdade no item 3 apenas para n inteiro positivo.

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{n-1}x^{n-1}h + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}h^k + \cdots \binom{n}{1}xh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[\binom{n}{n-1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1} + \cdots \binom{n}{1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left[\binom{n}{n-1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1} + \cdots \binom{n}{1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h} \\
&= \binom{n}{n-1}x^{n-1} = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Deixaremos como exercício para o aluno mostrar que vale para n inteiro negativo. A nossa sugestão é que o aluno substitua n por $-n$ e faça contas ou que use a derivada do inverso que veremos mais à frente.

Em sala de aula, costumamos dizer que, para derivar um monômio x^n, o aluno deve derrubar o expoente e por $n - 1$ no expoente, para gerar nx^{n-1}.

De posse das três operações acima, já podemos derivar polinômios de maneira mais fácil.

- EXEMPLO 1: Derive o polinômio $p(x) = \pi x^4 + \sqrt{3}x^3 - 5x^2 - 2x + 7$.

  Solução: Aplicando as operações 2, 1 e 3 nesta ordem temos

$$\begin{aligned}
p'(x) &= (\pi x^4 + \sqrt{3}x^3 - 5x^2 - 2x + 7)' \\
&= (\pi x^4)' + (\sqrt{3}x^3)' + (-5x^2)' + (-2x)' + (7)' \\
&= \pi(x^4)' + \sqrt{3}(x^3)' - 5(x^2)' - 2(x)' + (7)' \\
&= 4\pi x^3 + 3\sqrt{3}x^2 - 10x^1 - 2
\end{aligned}$$

E a derivada do produto de funções? É igual ao produto das derivadas? A resposta é não.

Derivada do produto de funções

Se f e g são duas funções diferenciáveis em um mesmo domínio então

$$(f(x)\ g(x))' = f(x)\ g'(x) + f'(x)\ g(x).$$

Demonstração: Em algumas operações matemáticas é proveitoso acrescentar zero, melhor dizendo, somar e subtrair uma mesma expressão. Para essa demonstração, será proveitoso subtrair e somar $f(x+h)\ g(x)$.

Veja que:

$$\begin{aligned} & f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ & \quad = f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \\ & \quad = f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + [f(x+h) - f(x)]g(x) \end{aligned}$$

Dividindo por h e aplicando o limite temos

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right] \\ & \quad = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)]}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{[f(x+h) - f(x)]g(x)}{h}\right] \\ & \quad = \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}g(x)\right]. \end{aligned}$$

Como f é diferenciável, então f é contínua e assim $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Pelo fato de f e g serem diferenciáveis, os limites $\lim\limits_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$ existem e portanto

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}g(x) \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &\quad + \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}\lim_{h\to 0} g(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

A regra básica da derivada de um produto de duas funções é igual à soma do produto do primeiro pela derivada do segundo com o produto da derivada do primeiro pelo segundo, ou comumente dito assim: a primeira vezes a derivada da segunda mais a segunda vezes a derivada da primeira.

• EXEMPLO 2: Derive o produto $f(x) = (2x - 3)(x^2 - x + 55)$.

Solução: Seguindo a regra do produto, o aluno deve repetir o primeiro $(2x - 3)$, multiplicar com a derivada do segundo $(x^2 - x + 55)$ e somar com a derivada do primeiro multiplicado pelo segundo. De forma clara,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-3)\,(x^2 - x + 55)' + (2x-3)'\,(x^2 - x + 55) \\ &= (2x-3)(2x-1) + 2(x^2 - x + 55) = 6x^2 - 10x + 113. \end{aligned}$$

Derivada do inverso de uma função

Se g é uma função diferenciável no seu domínio então $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ é diferenciável e a sua derivada é

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Demonstração: Observe as igualdades abaixo

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \end{aligned}$$

E aplique o limite para ter

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right] \\ &= -\lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \cdot \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \right] = -g'(x) \cdot \frac{1}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

Foi usado acima o fato de g ser diferenciável implicar em g contínua e portanto $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$. Assim temos

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- EXEMPLO 3: Já é conhecido que se $f(x) = \frac{1}{x}$, então $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Qual é a derivada de $g(x) = \frac{1}{x^2}$? E de $h(x) = \frac{1}{x^n}$ para n natural?

Solução: seguindo a derivada do inverso, temos

$$g'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

e

$$h'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Observe que é possível interpretar esta derivada da seguinte forma: se $h(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, então, podemos usar a regra que "derruba" o expoente $-n$. De fato, $h'(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

- EXEMPLO 4: Qual é a derivada de $f(x) = \frac{1}{x+4}$?

Solução: seguindo a derivada do inverso, temos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+4}\right)' = -\frac{1}{(x+4)^2}.$$

Observe que neste exemplo $g(x) = x + 4$ tem derivada igual a 1 e que

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{1}{(x+4)^2}.$$

Derivada do quociente de funções

Se f e g são duas funções diferenciáveis em um mesmo domínio então

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração: Para este caso, usaremos que a divisão de um número $f(x)$ por um número $g(x)$ é igual ao produto de $f(x)$ pelo inverso de $g(x)$, ou seja,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x).\frac{1}{g(x)}.$$

Pelas derivadas do produto e do inverso, a derivada do produto acima existe e é igual a

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)' = f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + \frac{1}{g(x)}f'(x)$$
$$= f(x)\left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right) + \frac{1}{g(x)}f'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

• EXEMPLO 5: Qual é a derivada de $g(x) = \frac{x^3-2x+1}{x+4}$?

Solução: seguindo a derivada do quociente, temos

$$g'(x) = \frac{(x^3-2x+1)'(x+4) - (x+4)'(x^3-2x+1)}{(x+4)^2}$$
$$= \frac{(3x^2-2)(x+4) - (1)(x^3-2x+1)}{(x+4)^2} = \frac{2x^3+12x^2-9}{(x+4)^2}.$$

Em sala de aula é costumeira a seguinte recomendação do professor:

1) primeiro derive o numerador e multiplique pelo denominador.

2) coloque o sinal de subtração.

3) derive o denominador e multiplique pelo numerador.

4) divida tudo pelo quadrado do denominador.

Ou, de modo "coloquial":

"A derivada do quociente de duas funções é igual à função de baixo, vezes a derivada da função de cima menos a função de cima vezes a derivada da função de baixo, sobre a função de baixo ao quadrado."

• EXEMPLO 6: Qual é a derivada de $f(x) = \frac{x^5-3x^2+5x+11}{x^2+6x-4}$?

Solução: seguindo a derivada do quociente, temos

$$f'(x) = \left(\frac{x^5-3x^2+5x+11}{x^2+6x-4}\right)'$$
$$= \frac{(5x^4-6x+5)(x^2+6x-4) - (2x+6)(x^5-3x^2+5x+11)}{(x^2+6x-4)^2}$$
$$= \frac{3x^6+24x^5-20x^4-23x^2+2x-86}{(x^2+6x-4)^2}.$$

EXERCÍCIOS

Encontre a derivada em relação à variável da função abaixo:

1) $f(x) = -2x$ Resposta: -2

2) $f(x) = 1 - 2x$ Resposta: -2

3) $f(x) = 1 - 2x + 5x^2$ Resposta: $-2 + 10x$

4) $f(x) = 7x^5 - 5x^4 + 13x^3 - \pi x^2 + \frac{1}{3}x + 17$ Resposta: $35x^4 - 20x^3 + 39x^2 - 2\pi x + \frac{1}{3}$

5) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^5}$ Resposta: $-\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{20}{x^6}$

6) $f(x) = \sqrt{3}(1-2x)$ Resposta: $-2\sqrt{3}$

7) $f(x) = \sqrt{3}(1-2x)(2-x)$ Resposta: $\sqrt{3}(4x-5)$

8) $f(x) = (x^2 - 5)(3x + 1)$ Resposta: $9x^2 + 2x - 15$

9) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ Resposta: $1 + \frac{1}{x^2}$

Use a regra da derivada do inverso para as que seguem.

10) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ Resposta: $-\frac{1}{(x-1)^2}$

11) $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ Resposta: $\frac{2}{(x-1)^3}$

12) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

Use a regra da derivada do quociente para as que seguem.

13) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

14) $f(x) = -\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

15) $f(x) = -\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)}$

16) Encontre a derivada da derivada de $f(x) = 5x^3$. Resposta: $30x$

3.7 DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

Discutiremos nesta seção derivadas de ordem superior como, por exemplo, a derivada da derivada de uma função, ou seja, a segunda derivada de uma função. A derivada de $y = f(x)$ em relação a x é denotada por $y' = f'(x)$. Observe que y' não deixa explícito em relação a qual variável estamos derivando. Na notação de Leibniz, a derivada de y em relação a x é denotada por $\frac{dy}{dx}$.

Atenção: isso não é uma fração!

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), um dos inventores do Cálculo, é considerado o grande gênio universal do século XVII e foi ele quem introduziu a notação $\frac{dy}{dx}$ dentre várias outras que usamos até hoje na Matemática.

Vejamos alguns exemplos antes de introduzirmos a noção de derivada de ordem superior (derivada segunda, derivada terceira, etc):

- EXEMPLO 1: Encontre a derivada de $y = x^5$

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4.$$

Agora, digamos que a função dependa de outra variável, por exemplo, uma da variável z e outra da variável t, e, observe:

- EXEMPLO 2: Encontre a derivada de $y = z^2$ (em relação a z) e de $y = 3 - t$ (em relação a t).

Solução:

$$\frac{dy}{dz} = 2z$$

e

$$\frac{dy}{dt} = -1.$$

Se desejamos encontrar a derivada de $y = f(x)$ no ponto $x = a$, a notação usada é $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.
Veja o exemplo a seguir:

• EXEMPLO 3: Encontre a derivada de $y = z^2$ no ponto $z = 3$.

Solução:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{z=3} = 2\,z\big|_{z=3} = 2.3 = 6$$

E a derivada segunda de uma função?

Para a derivada da derivada de uma função $y = f(x)$, chamada derivada segunda de $y = f(x)$, usaremos aqui os seguintes tipos de notação:

a) $y'' = f''(x)$. b) $\frac{d^2y}{dx^2}$.

A derivada segunda é igual derivada da derivada de $y = f(x)$, ou seja, é a derivada de $\frac{dy}{dx}$, cuja notação é $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[y']$.

Atenção: essa notação entre colchetes também é comum e você poderá encontrá-la nos livros de Cálculo.

• EXEMPLO 4: Encontre a derivada segunda de $y = x^5$.

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3.$$

• EXEMPLO 5: Encontre a derivada segunda de $y = \frac{1}{x}$.

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}.$$

• EXEMPLO 6: Encontre a derivada segunda de $y = \frac{1}{x}$ no ponto $x = -1$.

Solução: Conforme o exemplo anterior temos

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1} = \left.\frac{2}{x^3}\right|_{x=-1} \frac{2}{(-1)^3} = -2.$$

Para a derivada da derivada segunda de uma função $y = f(x)$, chamada derivada terceira de $y = f(x)$, usaremos aqui os seguintes tipos de notação:

a) $y''' = f'''(x)$.

b) $\frac{d^3y}{dx^3}$.

A derivada terceira é igual derivada da derivada segunda de $y = f(x)$, ou seja, é a derivada de $\frac{d^2y}{dx^2}$, cuja notação é $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}[y'']$.

• EXEMPLO 7: Encontre a derivada terceira de $y = \frac{1}{x}$ no ponto $x = -1$.

Solução: Conforme exemplo 5,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

e

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{x^4}.$$

Nós queremos então $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=-1} = -\frac{6}{(-1)^4} = -\frac{6}{1} = -6$.

A derivada segunda é também conhecida como derivada de ordem 2. A derivada terceira é também chamada de derivada de ordem 3. A derivada de ordem n é denotada por

$$\frac{d^ny}{dx^n}.$$

• EXEMPLO 8: Encontre a derivada de ordem n de $y = \frac{1}{x}$

Solução:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

EXERCÍCIOS

Encontre a derivada de ordem 2 para as funções que se seguem:

OBS: Este exercício tem por objetivo fazer com que o aluno se dedique às notações. Portanto esforce-se para usar a notação corretamente.

1) $f(x) = -2x$ — Resposta: 0

2) $f(x) = 1 - 2x + 5x^2$ — Resposta: 10

3) $f(x) = 7x^5 - 5x^4 + 13x^3 - \pi x^2 + \frac{1}{3}x + 17$ — Resposta: $140x^3 - 60x^2 + 78x - 2\pi$

4) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^5}$ — Resposta: $\frac{2}{x^3} - \frac{18}{x^4} + \frac{120}{x^7}$

5) $f(x) = \sqrt{3}(1-2x)$ — Resposta: 0

6) $f(x) = \sqrt{3}(1-2x)(2-x)$ — Resposta: $4\sqrt{3}$

7) $f(x) = (x^2 - 5)(3x + 1)$ — Resposta: $18x + 2$

8) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ — Resposta: $-\frac{2}{x^3}$

Use a regra da derivada do inverso para as que seguem.

9) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ — Resposta: $\frac{2}{(x-1)^3}$

10) $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ — Resposta: $\frac{-6}{(x-1)^4}$

11) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

Use a regra da derivada do quociente para as que seguem.

12) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Encontre a derivada de ordem 2 no ponto $x = 0$ para as funções dos exercícios 1, 2 e 3.

Respostas: 0, 10 e -2π

3.8 TAXA DE VARIAÇÃO

O crescimento da área de uma vitória-régia é de 5 cm^2 a cada dois dias, então dizemos que a taxa de crescimento médio da área da vitória-régia é de 2,5 cm^2/dia. O crescimento é uma variação, assim como decrescimento. Poderíamos escrever apenas que a taxa de variação média da área da vitória-régia é de 2,5 cm^2/dia. O fato da taxa ser positiva significa que é um crescimento. Se fosse negativa, significaria um decrescimento, e se fosse zero, significaria que não houve variação.

Chamamos $\Delta x = x - x_0$ de variação em x e $\Delta y = y - y_0$ a variação em y. A razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é chamada taxa de variação média de y em relação a x.

• EXEMPLO 1: Suponha que um motorista, após 30 segundos de sua partida, olha para o velocímetro e registra que o veículo esteja a uma velocidade de $45km/h$ e que após 1 minuto registra que esteja a uma velocidade de $60km/h$. Qual a taxa de variação média da velocidade em relação ao tempo?

Solução: Seja $\Delta v = (60-45)km/h = 15km/h$ a variação da velocidade $\Delta t = \left(1-\frac{1}{2}\right)$ min a variação do tempo. Então a taxa de variação média da velocidade em relação ao tempo é $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30km/h$ a cada minuto.

O que aconteceria com a taxa de variação média da velocidade se esse tempo fosse cada vez mais curto?

Velocidade e Aceleração: Suponha que um objeto se mova em linha reta e que $S(t)$ seja a sua posição no instante t. A velocidade média v_m é igual a taxa de variação média da posição em relação ao tempo, ou seja,

$$v_m = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}.$$

A velocidade $v(t_0)$ do objeto no instante t_0 é igual ao limite

$$\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

se o limite existir. Neste caso,

$$v(t_0) = S'(t_0).$$

A velocidade $v(t_0)$ é também chamada de taxa de variação instantânea da posição no instante t_0. Se o limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

existir então a aceleração $a(t_0)$ é definida como sendo este limite, ou seja,

$$a(t_0) = v'(t_0)$$

Assim, podemos entender que a aceleração $a(t_0)$ (no instante t_0) é a derivada da velocidade $v(t)$ no instante t_0, também chamada de taxa de variação instantânea da velocidade no instante t_0.

• EXEMPLO 2: Aceleração constante.

Quais são a posição e a velocidade no instante t de um objeto cuja aceleração é uma constante a?

Solução: Vimos no exemplo anterior que a derivada da velocidade é a aceleração. A única função de t cuja derivada é constante é $v(t) = at + C$, onde C é uma constante. Veja que $v(0) = C$ e, portanto $v(t) = at + v(0)$. Sabendo que a derivada da função posição $S(t)$ é a velocidade, então deduzimos que $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v(0)t + S(0)$.

Os autores dos livros de física costumam escrever o seguinte:

Se a aceleração é constante, ou seja, independente do tempo t, então a velocidade média é simplesmente a média aritmética desde o início até o instante final. Para o intervalo de tempo de 0 a t,

$$v_m = \frac{v(0) + v(t)}{2}.$$

Por outro lado, a velocidade média é igual a

$$v_m = \frac{S(t) - S(0)}{t}.$$

Igualando as duas temos

$$S(t) = S(0) + \frac{t}{2}[v(0) + v(t)].$$

A aceleração média é igual a

$$a_m = \frac{v(0) + v(t)}{t}.$$

Pelo fato de a aceleração ser constante, temos $a = a_m$. Logo $v(t) = at + v(0)$ e

$$S(t) = S(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2.$$

• EXEMPLO 3: Queda livre. A aceleração de um corpo em queda livre, denominada aceleração da gravidade, é constante. Na superfície terrestre ou próxima a ela, o seu módulo é aproximadamente 9,8m/s^2.

Uma moeda é largada de uma torre. Ela parte do repouso e se move em queda livre. Calcule sua posição e sua velocidade no instante 1 segundo.

Solução: Vamos admitir que a origem seja no topo da torre, ou seja, $S(0) = 0$ e que o sentido positivo do eixo-y seja para cima. Como ela parte do repouso, então $v(0) = 0$. Logo

$$S(1) = 0 + 0.1 + \frac{1}{2}(-g)1^2 = -4,9m.$$

• EXEMPLO 4: Uma barata grande pode desenvolver uma velocidade igual a 1,50m/s em intervalos de tempo curtos. Suponha que, ao ligar a lâmpada em um motel, você aviste uma barata que se move com velocidade de 1,50m/s na mesma direção e sentido em que você se movimenta. Se você está a 0,90m atrás da barata com velocidade de 0,80m/s, qual deve ser sua aceleração mínima, para que você alcance a barata antes que ela se esconda embaixo de um móvel situado a 1,20m da posição inicial dela?

Você deve pensar antes de ver a solução abaixo!

Solução: você 0,90m barata 1,20m móvel

A barata tem velocidade constante e, portanto aceleração zero. Para você calcular a sua aceleração mínima, você precisará saber quanto tempo a barata gasta para alcançar o móvel. Nesse mesmo tempo, você deverá também alcançar o móvel. Você deverá trabalhar com duas equações. Uma para descobrir o tempo da barata para alcançar o móvel.

$$1,20m = S_b(t) = S_b(0) + v_b(0)t + \frac{1}{2}a_bt^2 = 0 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}0.t^2 = \frac{3}{2}t$$

e portanto $t = 0,8s$. Isso significa que você deve alcançar o móvel em 0,8s ou menos.

$$2,10m = S_h(0,8) = S_h(0) + v_h(0)0,8 + \frac{1}{2}a_h(0,8)^2 = \frac{8}{10}.\frac{8}{10} + \frac{1}{2}a_h\frac{64}{100}$$

Logo a_h= 6,5625m/s^2.

EXERCÍCIOS

1) Qual é a taxa de variação média da área, se os lados de um quadrado crescem 10%?

Resposta: 21%.

2) Qual é a taxa de variação média da área, se os lados de um quadrado decrescem 10%?

Resposta: -19%.

3) Qual é a taxa de variação média da função $f(x) = x^2 - 2x$, no intervalo [1,2]? E no intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$?

Resposta: 1.

4) Qual é a taxa de variação média da função $f(x) = x^3 - 2$, no intervalo [1,2]? E no intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$?

Resposta: $7. \frac{19}{4}$.

5) Uma moeda é largada de uma torre de 48m. Suponha que ela parte do repouso e se move em queda livre. Calcule sua posição e sua velocidade nos instantes 1, 2 e 3 segundos.

Dica: A aceleração é a gravidade, ou seja, a = -9,8m/s^2. Segundo o problema, $S(0)$ = 48m e $v(0) = 0$. Então

$$S(t) = S(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 = 48 - 4,9t^2.$$

Fazendo $t = 1s$, temos

$$S(1) = 48 - 4{,}9.1^2 = 43{,}1m.$$

Faça o restante deste exercício.

6) De um topo de um edifício, é arremessada uma bola para cima. A bola sai da mão do arremessador, na altura da cabeça, com velocidade de 15m/s. A bola retorna passando raspando a cabeça do arremessador e continua a queda. Calcule:

a) a posição e a velocidade da bola 1s e 4s após deixar a mão do arremessador;

b) a velocidade quando a bola está a 5m acima da cabeça do arremessador;

c) a altura máxima atingida e o tempo que ela leva para atingir essa altura;

d) a aceleração da bola quando ela se encontra na altura máxima.

3.9 REGRA DA CADEIA

Nesta seção, estudaremos a derivada de composição de funções. Os exemplos dessa seção serão limitados às derivadas de potências de polinômios. Como primeiro exemplo, perguntamos: qual é a derivada de $f(x) = (x^2 + 1)^5$? Uma solução trabalhosa a ser dada seria desenvolver a expressão por meio de somatórios de monômios. A regra da cadeia simplifica esta solução. A expressão $(x^2 + 1)^5$ é a composição $(f o u)(x) = f(u(x))$ onde $u(x) = x^2+1$ e $f(u)=u^5$. A derivada de uma composição é um produto de derivadas conforme o teorema abaixo:

Teorema da Regra da Cadeia

Se f é uma função diferenciável em $g(x)$ e g é uma função diferenciável em x então a composição $g = fou$ é diferenciável em x e a derivada de $g(x) = (fou)(x)$ é igual a $\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{d}{du}[f(u)]\frac{d}{dx}[u(x)]$, ou, equivalentemente, $\frac{dg}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$.

Em outra notação, $(fog)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

• EXEMPLO 1: Encontre a derivada de $g(x) = (x^2 + 1)^5$.

Solução: A expressão acima é a composição $g(x) = (fou)(x) = f(u(x))$ onde $u(x) = x^2 + 1$ e $f(u) = u^5$. Então

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4.2x = 5(x^2+1)^4.2x = 10x(x^2+1)^4.$$

• EXEMPLO 2: Seja $p(x)$ um polinômio. A derivada de $g(x) = [p(x)]^n$ é $[p(x)^n]' = np(x)^{n-1}p(x)'$.

Solução: a função $g(x) = [p(x)]^n$ é a composição $g = fop$ onde $f(p)=p^n$ e $p = p(x)$.

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} = np^{n-1}\frac{dp}{dx} = np(x)^{n-1}\,p(x)'.$$

Você deve ter percebido como funciona a regra da cadeia para potências de polinômios. Em sala de aula o professor costuma dizer que a derivada de uma potência de polinômio é feita da seguinte forma:

a) derrube o expoente n;

b) tire 1 do expoente do polinômio;

c) multiplique o resultado pela derivada do polinômio;

A regra no exemplo 2 acima vale também para $n \in \mathbb{R}$ e para qualquer função $p(x)$ diferenciável.

• EXEMPLO 3: Encontre a derivada de $g(x) = \frac{1}{2x-1}$

Solução: O aluno já sabe derivar a função $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ usando a regra da derivada do quociente. Neste exemplo usaremos a regra da cadeia. Veja que $g(x) = \frac{1}{2x-1} = (2x-1)^{-1}$. Pelo exemplo 2, temos

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = -1(2x-1)^{-1-1}.2 = -2(2x-1)^{-2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

Como o exemplo acima, antes de usarmos a regra da cadeia, devemos ajustar a função colocando-a como uma potência de função. Vejamos outro exemplo:

• EXEMPLO 4: Encontre a derivada de $g(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Solução: A função $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ é igual a $g(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$. O formato $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ é o ideal para usarmos a regra da cadeia. Logo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

• EXEMPLO 5: Encontre a derivada de $g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-1}}$.

Solução: Escrevendo a função como a potência de função racional $\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$ e usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+3}{x-1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^{\frac{2}{3}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+3}{x-1}\right] = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2}.\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+3}{x-1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2}.\left[\frac{2(x-1)-(2x+3).1}{(x-1)^2}\right] = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2}.\frac{-5}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-5}{3(x-1)^2}\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2}.$$

EXERCÍCIOS

1) Encontre a derivada de:

a) $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

Resposta: $f'(x) = 10x(x^2 + 1)^4$.

b) $g(x) = (x^2 - 2x + 1)^5$. Sugestão: veja que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Resposta: $g'(x) = 10(x - 1)$.

c) $h(x) = (3x^4 - 5x + 1)^{\frac{2}{5}}$.

Resposta: $h'(x) = \frac{2}{5}(3x^4 - 5x + 1) - \frac{3}{5}(12x^3 - 5)$.

d) $f(x) = \frac{3}{5x+1}$.

Resposta: $f'(x) = \frac{-15}{(5x+1)^2}$.

e) $g(x) = \sqrt[3]{5x + 1}$.

Resposta: $g'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$.

f) $f(x) = \left(\frac{x-1}{5x+1}\right)^3$.

Resposta: $f'(x) = \frac{18(x-1)^2}{(5x+1)^4}$.

g) $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$.

Resposta: $g'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+3}}$.

h) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Resposta: $h'(x) = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

i) $g(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 1)}$.

Resposta: $g'(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}}$

j) $f(x) = \sqrt{(x - 1)^{-3}}$.

Resposta: $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{(x-1)^5}}$

3.10 DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Veremos nesta seção as derivadas de algumas funções trigonométricas. Como dito na revisão de trigonometria (ver apêndice), o arco será sempre medido em radianos. Quando o arco for medido em graus, então isso ficará claro para o aluno, pois será evidenciado no texto.

Para mostrar as relações nos exemplos 1 e 2 a seguir, precisaremos usar as relações trigonométricas já conhecidas do ensino médio:

a) $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a.$

b) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$

No exemplo 1, da seção do Teorema do Sanduíche, mostramos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

E, no exercício 1 da mesma seção, o aluno ficou de verificar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Mostraremos no exemplo abaixo que a derivada do seno é o cosseno.

- EXEMPLO 1:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$$

Solução: Da definição de derivada de uma função, sabemos que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Assim, considerando que $f(x) = \operatorname{sen} x$, determinamos:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} \right] + \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right] \\
&= \operatorname{sen} x.0 + \cos x.1 = \cos x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x.$$

• EXEMPLO 2:

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x.$$

Solução: De modo análogo ao exemplo anterior:

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= \frac{d}{dx}[\cos x] = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x\ \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h - 1}{h}\right] - \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\ \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right] \\ &= \cos x.0 - \operatorname{sen} x.1 = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

• EXEMPLO 3: Usamos $\sec^2 x$ para representar $(\sec x)^2$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x.$$

Solução: A tangente é razão de duas funções diferenciáveis, seno e cosseno, e, portanto, é diferenciável nos pontos em que o cosseno não é zero. A derivada da tangente é

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x.\cos x - \operatorname{sen} x.(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Deixamos para o aluno mostrar que:

a)

$$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x.$$

b)

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x\ \operatorname{tg} x.$$

c)

$$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x\cot x.$$

De posse da regra da cadeia e das derivadas de funções trigonométricas, podemos agora apresentar as derivadas de potências de funções trigonométricas.

• EXEMPLO 4:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}^2 x] = 2\text{sen}x\cos x.$$

Solução: De fato, o aluno pode usar a regra de derrubar o expoente 2, tirar 1 do expoente e multiplicar pela derivada da base, ou seja,

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}^2 x] = 2\text{sen}^{2-1}x.\frac{d}{dx}[\text{sen}x] = 2\text{sen}x\cos x.$$

• EXEMPLO 5:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}3x] = 3\cos 3x.$$

Solução: Aqui o arco é $3x$ ou seja, $\text{sen}3x = \text{sen}(3x)$. Faça $u = 3x$. Então

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}3x] = \frac{d}{du}[\text{sen}u].\frac{du}{dx} = \cos u.3 = 3\cos 3x.$$

• EXEMPLO 6: Se $p(x)$ é um polinômio então

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}p(x)] = p'(x)\cos p(x).$$

De forma mais geral, temos o exemplo a seguir:

• EXEMPLO 7: Se $u(x)$ é uma função diferenciável em x então

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}u] = \cos u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen}u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg}u] = \sec^2 u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cotg}u] = -\csc^2 u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u\ \text{tg}u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[\csc u] = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}.$$

- EXEMPLO 8:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[sen(x^2-3x+1)] &= (x^2-3x+1)'\cos(x^2-3x+1)\\ &= (2x-3)\cos(x^2-3x+1).\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

1) Encontre a derivada em relação a x da função:

a) $f(x) = 5\text{sen}x - 6\cos x$;

b) $f(x) = \text{sen}(-x)$;

c) $f(x) = \cos(-x)$;

d) $f(x) = \text{tg}(-5x)$;

e) $f(x) = 5\text{tg}x - 6\sec x$;

f) $f(x) = \text{sen}^3 x$;

g) $f(x) = \sqrt{\cos x}$;

h) $f(x) = \text{sen}x \cos x$

i) $f(x) = \frac{\text{sen}x}{1-\cos x}$

2) Encontre a taxa de variação instantânea da função abaixo aplicada no ponto $x=\frac{\pi}{4}$.

a) $g(x) = \text{sen}x$;

b) $g(x) = \cos x$;

c) $g(x) = \text{tg}x$;

d) $g(x) = \text{sen}^3 x$;

e) $g(x) = \sqrt{\cos x}$;

f) $g(x) = \text{sen}x \cos x$;

g) $g(x) = \frac{\text{sen}x}{1-\cos x}$

3) Encontre a segunda derivada em relação a x da função:

a) $f(x) = \text{sen}x$;

b) $g(x) = \cos x$;

c) $f(x) = \text{tg}x$;

d) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x;$

e) $f(x) = \sqrt{\cos x}\ ;$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x;$

g) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}.$

4) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico da função abaixo no ponto $x = \frac{\pi}{4}$:

a) $g(x) = \operatorname{sen} x;$

b) $g(x) = \cos x;$

c) $g(x) = \operatorname{tg} x;$

5) Determine os números x entre 0 e 2π onde a reta tangente à curva no ponto x é uma reta horizontal.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x;$

b) $f(x) = \cos x;$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x;$

3.11 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Na relação $x^2 + y^2 = 1$ entre x e y fica claro que y depende de x e vice-versa. Escolheremos x como variável livre (ou independente), e, portanto y será dependente de x. É uma dependência que chamamos de dependência implícita enquanto a dependência $y = \sqrt{1-x^2}$ é chamada de dependência explícita.

Na relação $x^4 - 7x^3y - 3x^2y^2 + 5xy^3 - y^4 = 0$ entendemos que y depende implicitamente de x.

• EXEMPLO 1: Encontre a derivada de y em relação a x sabendo que $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: A expressão $x^2 + y^2$ é uma expressão que depende de x e y e de posse da igualdade $x^2 + y^2 = 1$ estaremos informados de que y depende implicitamente de x. Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}[y^2] = 2y\frac{dy}{dx}$$

e a derivada de $x^2 + y^2$ em relação a x é

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = 2x + 2y\frac{dy}{dx}.$$

Como expressões iguais possuem mesma derivada, então a derivada de $x^2 + y^2$ é igual à derivada de 1, ou seja,

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ implica } \tfrac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \tfrac{d}{dx}[1] = 0.$$

Logo

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Se estivermos interessados em escrever a derivada acima como uma função de x, então devemos escrever explicitamente y como função de x. A variável y será uma função de x satisfazendo a relação $x^2 + y^2 = 1$ se e somente se $y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$. A expressão $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ não é uma função de x. Assim temos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quando derivamos uma variável y em relação a outra variável x usando a dependência implícita de y em relação a x, dizemos que estamos derivando implicitamente.

• EXEMPLO 2: Use a derivada implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$ sabendo que $2x^2 - 5y^3 = \sqrt{2}$.

Solução: Derivando ambos os membros em relação a x, temos

$$\frac{d}{dx}[2x^2 - 5y^3] = \frac{d}{dx}[\sqrt{2}]$$

ou seja,

$$4x - 15y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{15y^2}.$$

Da relação $2x^2 - 5y^3 = \sqrt{2}$, concluímos que $y = \sqrt[3]{\frac{2x^2-\sqrt{2}}{5}}$. Portanto, substituindo essa expressão de y na fómula $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{15y^2}$, encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt[3]{25}x}{15\sqrt[3]{(2x^2-\sqrt{2})^2}}.$$

• EXEMPLO 3: A que taxa y está variando, quando $x = 0$, sabendo que $2x^2 - 5y^3 = \sqrt{2}$?

Solução:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{4\sqrt[3]{5}.0}{15\sqrt[3]{2.0^2 - \sqrt{2}}} = 0.$$

Ou seja, a taxa de variação de y com respeito a x, quando $x = 0$ é nula.

• EXEMPLO 4: Um tanque contém 1000 polegadas cúbicas de gás natural sob a pressão de 5 libras por polegada quadrada. Encontre a taxa de variação do volume V, se a pressão P diminui à razão de 0,05 libras por polegada quadrada por hora e a temperatura é constante, conhecendo a lei de Boyle: $P.V = k$, onde k é uma constante.

Solução: Dizer que a pressão diminui à razão de 0,05 libra por polegada quadrada por hora, significa que $\frac{dP}{dt} = -0,05\frac{l}{p^2}/h$. Devemos encontrar $\frac{dV}{dt}$. Derivando a igualdade $P.V = k$ em relação ao tempo t, temos:

$$P\frac{dV}{dt} + V\frac{dP}{dt} = 0.$$

Logo,

$$P\frac{dV}{dt} = -V\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{P}\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1000}{5}(-0,05) = 10p^3/h.$$

Conclusão: a taxa de variação do volume do gás com respeito ao tempo é de 10 p^3/h, ou seja, quando a pressão P diminui à razão de 0,05 libra por polegada quadrada por hora, para um tanque de 1000p^3 de gás natural sob a pressão de 5 libras por polegada quadrada, o volume do gás aumenta a 10 p^3/h.

EXERCÍCIOS

1) Siga os exemplos 1 e 2 desta seção para obter $\frac{dV}{dt}$.

a) $3x^2 - y^2 = -1$.

Resposta: $3\frac{x}{y}$.

b) $x^2 - 2y^5 = 4$.

Resposta: $\frac{x}{5y^4}$.

c) $x^2 - xy + y^2 = 0$.

Resposta: $\frac{y-2x}{2y-x}$.

d) $\cos(xy) = xy$.

Resposta: $-\frac{y}{x}$.

2) Na teoria da relatividade restrita, a massa de uma partícula movendo-se à velocidade v é

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{x^2}}}$$

onde m é a massa em repouso e x é a velocidade da luz. A que taxa a massa estará variando quando a velocidade da partícula for de $\frac{1}{2}x$ e a taxa de variação da velocidade for de $0{,}01x$ por segundo?

Solução: Seja $M = M(x) = \dfrac{4\sqrt[3]{5x}}{15\sqrt[3]{2x^2 - \sqrt{2}}}$ a massa da partícula. Devemos encontrar taxa de variação da massa M, ou seja, $\dfrac{dM}{dx}$ Sugestão: Use a regra da cadeia.

3) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $x^2 + \sqrt{\operatorname{sen} y} - y^2 = 1$, no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) A largura de um retângulo é a metade de seu comprimento. A que taxa sua área está aumentando no instante em que sua largura é de $10cm$ e está aumentando a $0{,}5cm/s$?

3.12 DIFERENCIAIS

Veja o seguinte problema:

> Suponha que um automóvel passe por você a uma velocidade de 100km/h. Estime quanto ele terá percorrido daqui a 1h.

Considere que o automóvel está sendo guiado por um legítimo condutor, que acelera ou desacelera quando necessário, mas que não pára. A melhor coisa a fazer é supor que sua velocidade será constante dentro do período de uma hora e então concluir que ele percorrerá aproximadamente 100km. Você deve ter observado que usamos o produto Velocidade X Espaço de tempo = Espaço percorrido. Lembre-se de que a velocidade é a derivada em relação a t da posição $S(t)$.

Uma estimativa é bem aceita, quando não temos condições de encontrar o valor exato. Para estimações precisamos de funções que se aproximam das que desejamos obter.

Seja f uma função diferenciável que dependa de x. Segundo a figura abaixo

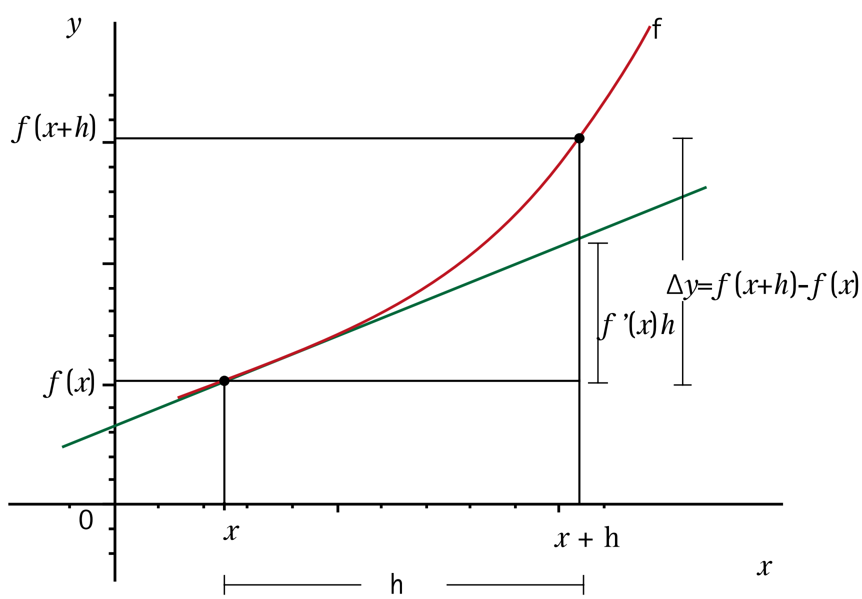


Figura 3.10

vemos que

$$f(x+h) - f(x) \cong f\,'(x)h.$$

Uma observação: o símbolo $\cong$ significa aproximado.

De fato, como $\Delta y = (f + h) - f(x)$ e $\Delta x = (x+h) - x = x + h - x = h$ então

$$y \cong f\,'(x)\Delta x.$$

Façamos $dx = \Delta x$ e $dy = f\,'(x)\,\Delta x$ para termos $dy = f\,'(x)dx$. Chamamos dx de diferencial de x e dy de diferencial de y. A diferencial de y depende de x e de dx.

Quanto mais próximo de zero for h, muito mais próximo de $f\,'(x)h$ será $f(x + h) - f(x)$ Olhe para a diferença

$$[f(x + h) - f(x)] - f\,'(x)h$$

e para h. Que afirmação você arriscaria dizer sobre o quociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f\,'(x)h}{h}?$$

Na verdade, quando h tende a zero, o quociente acima tende a zero. Basta ver que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f\,'(x)h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f\,'(x)h}{h} = f\,'(x) - f\,'(x) = 0.$$

A diferença $f(x + h) - f(x)$ é chamada de variação de f de x até $x + h$, ou de incremento de f de x até $x + h$. O produto $f\,'(x)h$ é uma estimativa para o incremento de f de x até $x + h$.

• EXEMPLO 1: Suponha que uma vitória-régia, em formato circular, ocupe hoje uma área de $1600\pi\ cm^2$. Digamos que a cada dia o seu raio cresce $1cm$. Calcule e estime o incremento da área da vitória-régia para daqui a dois dias.

Solução: Sabendo que a área de um círculo é igual a πr^2 então, se a área inicial é de $1600\pi\ cm^2$, o raio inicial da vitória-régia é $40cm$. Daqui a dois dias seu raio será $42cm$ e sua área $\pi 42^2 = 1764\pi\ cm^2$. O incremento da área para daqui a dois dias é $(1764 - 1600)\pi\ cm^2 = 164\pi\ cm^2$. A função é $f(r) = \pi r^2$, com $h = 2cm$. Logo o incremento é

$$f(r + h) - f(r) = f(40 + 2) - f(40) = (1764 - 1600)\pi\ cm^2 = 164\pi\ cm^2.$$

Sabendo que $f\,'(r) = 2\pi r$, a estimativa é $f\,'(r)h = f\,'(40)2 = 2\pi 40.2 = 160\pi\ cm^2$.

• EXEMPLO 2: Suponha que o crescimento do volume de uma célula é dado por $V(t) = \sqrt[3]{kt+c}$, onde k e c são constantes e t é o tempo. Encontre uma estimativa de crescimento do volume da célula para intervalo de tempo [1,2].

Solução: Veja que $V\,'(t) = \frac{k}{3(kt+c)^{2/3}}$, $h = 1$ e portanto

$$V(t+h) - V(t) \cong V\,'(t)h,$$

ou seja, o incremento do volume da célula no intervalo [1,2] é

$$V(2) - V(1) \cong \frac{k}{3(k1+c)^{2/3}}.1 = \frac{k}{3(k+c)^{2/3}}.$$

EXERCÍCIOS

1) Suponha que o planeta Terra seja uma esfera de raio de 4000 milhas (aproximadamente 6437 quilômetros). O volume de gelo nos pólos norte e sul é estimado em 8 milhões de milhas cúbicas (aproximadamente 33,4 milhões de quilômetros cúbicos). Suponha que esse gelo derreteu e a água produzida se distribuiu uniformemente sobre a superfície da Terra. Estime a profundidade de água adicionada a todos os pontos sobre a Terra.

2) Quando um cubo metálico é aquecido, o comprimento de cada aresta aumenta $\frac{1}{10}\%$ por grau de aumento na temperatura. Calcule o incremento na área superficial e no volume do cubo por grau de aumento na temperatura.

Resposta: $\frac{2}{10}\%, \frac{3}{10}\%$.

3.13 APLICAÇÕES DA DERIVADA

Nesta seção, veremos como fazer gráficos com alguns detalhes, especificando intervalos de crescimento ou decrescimento da função. É importante revisar o conceito de funções crescentes e decrescentes, já visto no Pré-cálculo.

Usaremos mais adiante esse estudo para resolver problemas de máximo e mínimo de uma função. Comecemos com um exemplo simples de máximo e mínimo.

• EXEMPLO 1: Um jardineiro possui apenas 32 metros de uma tela para cercar suas plantas. Sabendo que precisa ocupar a maior área possível e que está disposto a cercar em um formato retangular, diga quais devem ser as dimensões do retângulo.

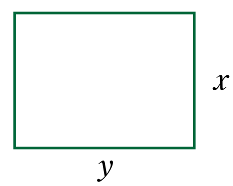


Figura 3.11

Solução: Denote por x e y as medidas dos lados do retângulo. Se a tela tem 32 metros então o perímetro do retângulo deve ser 32 metros, ou seja, $2x + 2y = 32$, o que implica $y = 16 - x$. A área do retângulo é igual a

$$S(x) = yx = (16 - x)x = -x^2 + 16x.$$

Vamos analisar o gráfico de $S(x)$:

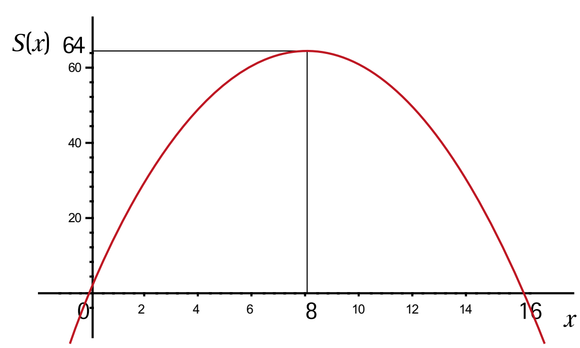


Figura 3.12

Vemos que $S(x)$ é crescente no intervalo $(-\infty,8]$ e decrescente no intervalo $[8,\infty)$. Vemos ainda que o valor máximo para a área é $S(8) = 64$. Isso significa que o retângulo a ser construído deve ser um quadrado de lado $8m$, pois faz com que a área do retângulo seja máxima: igual a 64.

Problemas desse tipo serão discutidos aqui.

Observe que $S(x) = -x^2 + 16x$ é uma função polinomial do 2º grau e, a derivada de $S(x)$ é igual à $S'(x) = -2x + 16$.

Pergunta-se:

• Quando $S'(x) > 0$?

$$S'(x) > 0 \leftrightarrow -2x + 16 > 0 \leftrightarrow x < 8$$

• Quando $S'(x) < 0$?

$$S'(x) < 0 \leftrightarrow -2x + 16 < 0 \leftrightarrow x > 8$$

Você já deve ter percebido, fazendo uma relação entre a primeira derivada e o comportamento da função, que se a derivada de f é positiva no ponto x, ou seja, $f'(x) > 0$ então f é crescente nas proximidades de x. Esse resultado é uma conseqüência do teorema do valor médio. Como uma motivação para o Teorema do Valor Médio, veja o exemplo a seguir:

• EXEMPLO 2: Suponha que um veículo após sair do repouso, $v(0) = S'(0) = 0$, tenha percorrido $100km$ em 1 hora. Então sua velocidade média é de $100km/h$. Isto significa que em algum instante t_1 sua velocidade esteve acima de $100km/h$. Concluímos que em um instante t_2 entre 0 e t_1 a velocidade do veículo foi igual a $100km/h$ ou seja, $S'(t_2) = 100km/h$.

Teorema do Valor Médio

Seja f uma função diferenciável em um intervalo (a,b) e contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Então existe um número $c \in [a,b]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Comentários: a razão

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

é a inclinação da reta secante s que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ do gráfico de f. A derivada $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto c.

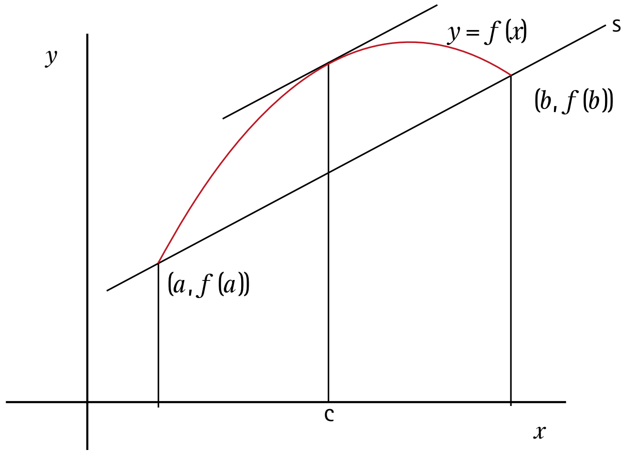
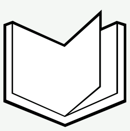


Figura 3.13

A interpretação geométrica para o Teorema do Valor Médio: em algum ponto c do intervalo $[a,b]$ existe uma reta tangente ao gráfico de f, cuja inclinação é mesma da reta secante s que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Leitura recomendada

O aluno interessado vai encontrar a demonstração do Teorema do Valor Médio no livro de cálculo escrito por Salas, Etgen, Hille (veja a bibliografia no final deste fascículo).

Vamos ver um exemplo de aplicação do Teorema do Valor Médio?

Uma conseqüência imediata do Teorema do Valor Médio é o Teorema de Rolle:

Teorema de Rolle

Seja f uma função diferenciável em um intervalo (a,b) e contínua no intervalo fechado [a,b]. Se $f(a) = f(b)$ então existe um número $c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = 0$.

Para mostrar o Teorema de Rolle, basta aplicar o Teorema do Valor Médio, supondo $f(a) = f(b)$.

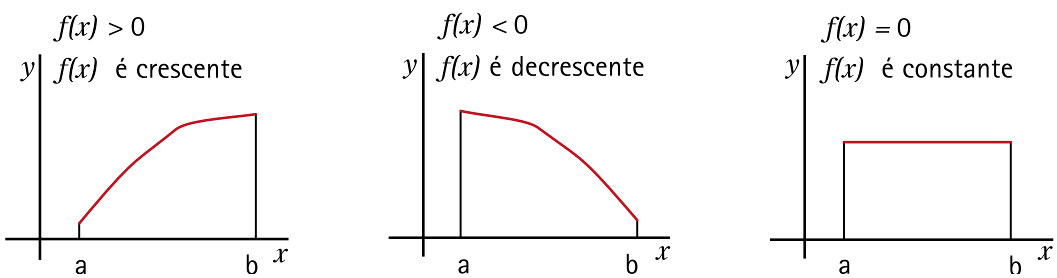
PROPRIEDADE 1: Seja f uma função diferenciável em um intervalo I:

a) Se $f\,'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I.

b) Se $f\,'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I.

c) Se $f\,'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então f é constante em I.

Veja a demonstração dentre os exercícios.



A igualdade $\frac{df}{dx} = 0$ em um intervalo I ocorre somente quando f for constante em relação a x no intervalo I. Isso é o mesmo que dizer que f independe de x.

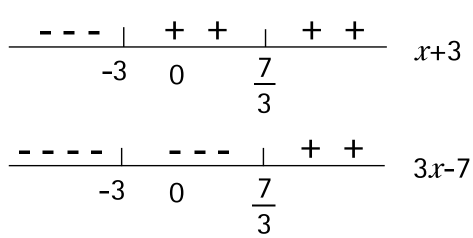
• EXEMPLO 3: Faça o gráfico de $f(x) = (x+3)^2(x-5)$, dizendo os intervalos em que f é crescente ou decrescente.

Solução: Conforme a propriedade 1, se quisermos saber o intervalo em que f é crescente ou decrescente, devemos calcular a derivada e estudar em qual intervalo a derivada é positiva ou negativa. A derivada de f é

$$f\,'(x) = (x+3)(3x-7).$$

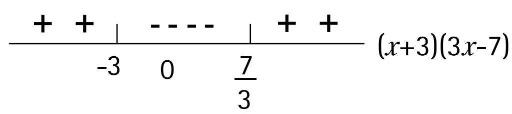
A derivada é um produto de dois monômios e, portanto, a derivada será positiva, quando ambos os monômios possuírem mesmo sinal, e será negativa, quando os monômios possuírem sinais contrários. Estudemos então o sinal de cada fator de $f\,'(x)$, como segue:

a) Faça uma reta como abaixo para cada fator, marcando os pontos em que $f\,'(x) = 0$.



b) Indique com — ou + sobre a reta, os intervalos onde cada fator é negativo ou positivo.

c) Conclua sobre o sinal de $f\,'(x)$ fazendo o produto dos sinais acima, ou seja:



Logo a derivada é positiva no intervalo $(-\infty, -3)$ e no intervalo $\left(\frac{7}{3}, \infty\right)$ e é negativa em $\left(-3, \frac{7}{3}\right)$. Assim, podemos concluir que f é crescente no intervalo $(-\infty, -3)$, f é decrescente no intervalo $\left(-3, \frac{7}{3}\right)$ e volta a ser crescente no intervalo $\left(\frac{7}{3}, \infty\right)$. O gráfico de f é:

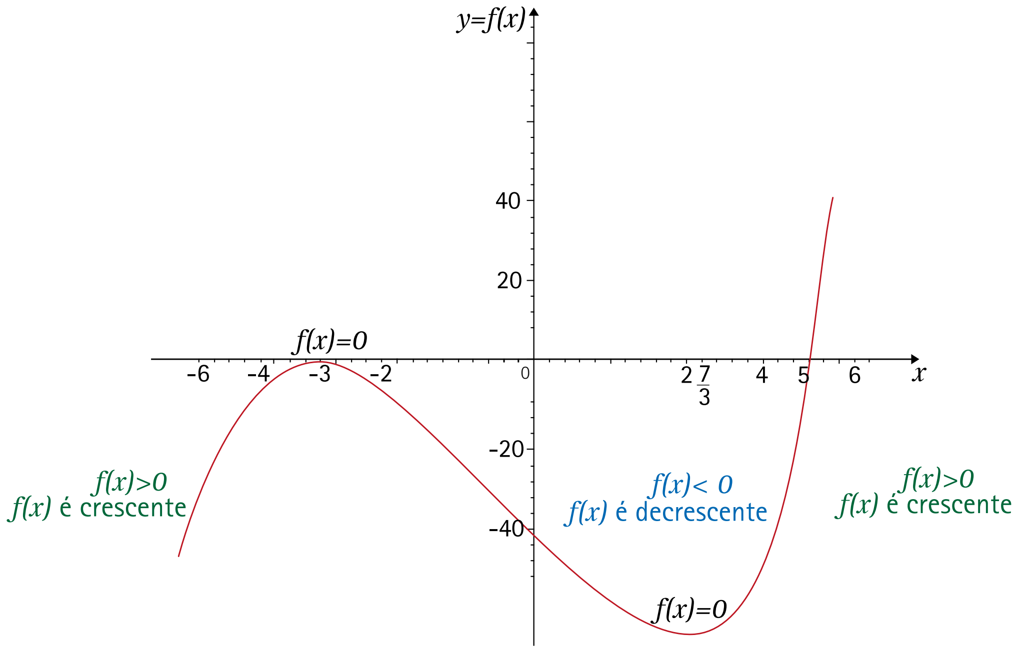


Figura 3.14

Você deve ter observado que, no exemplo acima, a derivada mudou de sinal nos pontos x em que $f\,'(x) = 0$. O exemplo da função modular é um exemplo onde a derivada muda de sinal nos pontos x em que $f\,'(x)$ não existe.

Definição

Se f é definida em c, então diremos que c é um ponto crítico de f se $f\,'(c) = 0$ ou se $f\,'(c)$ não existe.

Existem pontos críticos de f, mas a derivada não muda de sinal. Isso significa que, se você quer estudar o ponto onde f muda de sinal, então os bons candidatos são os pontos críticos. ATENÇÃO! Nem todos os pontos críticos são pontos em que a derivada muda de sinal. Vejamos um exemplo:

• EXEMPLO 4: Seja $f(x) = x^3$. Observe que a derivada de f é $f'(x) = 3x^2$. Logo a derivada é sempre não negativa, ou seja, não muda de sinal. A derivada é zero em $x = 0$. Portanto $x = 0$ é um ponto crítico de f, mas f' não muda de sinal em $x = 0$. Veja o gráfico de $f(x) = x^3$, no exemplo 6 da seção 1 do capítulo de derivadas.

A seguir, apresentamos uma sugestão de roteiro para fazer gráficos:

a) encontre $f'(x)$.

b) encontre os pontos críticos de f.

c) estudemos então o sinal de cada fator de $f'(x)$.

d) use a propriedade 1 para afirmar se f é crescente ou decrescente.

e) se existirem, marque os pontos x em que $f(x) = 0$, chamados zeros da função f. Encontre a imagem dos pontos críticos.

f) faça o gráfico de f.

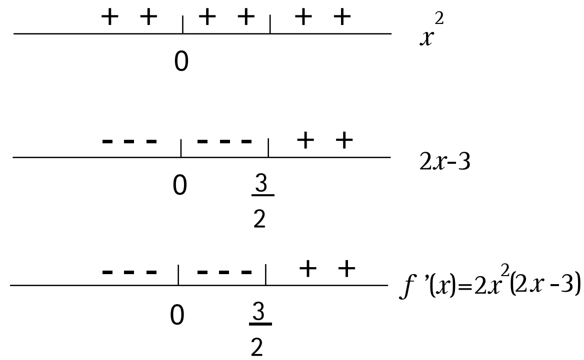
• EXEMPLO 5: Faça o gráfico de $f(x) = x^3(x - 2)$, dizendo os intervalos em que f é crescente ou decrescente.

Solução: Vamos seguir o roteiro exibido acima.

a) $f'(x) = 2x^2(2x - 3)$.

b) Os pontos críticos de f são $2x^2(2x-3) = 0 \rightarrow x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$.

c) Veja abaixo o sinal de $f'(x)$.



d) Logo f é decrescente no intervalo $(-\infty, \frac{3}{2})$ e crescente no intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$.

e) Veja que $f(0) = 0 = f(2)$ e $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$.

f) O gráfico de f é:

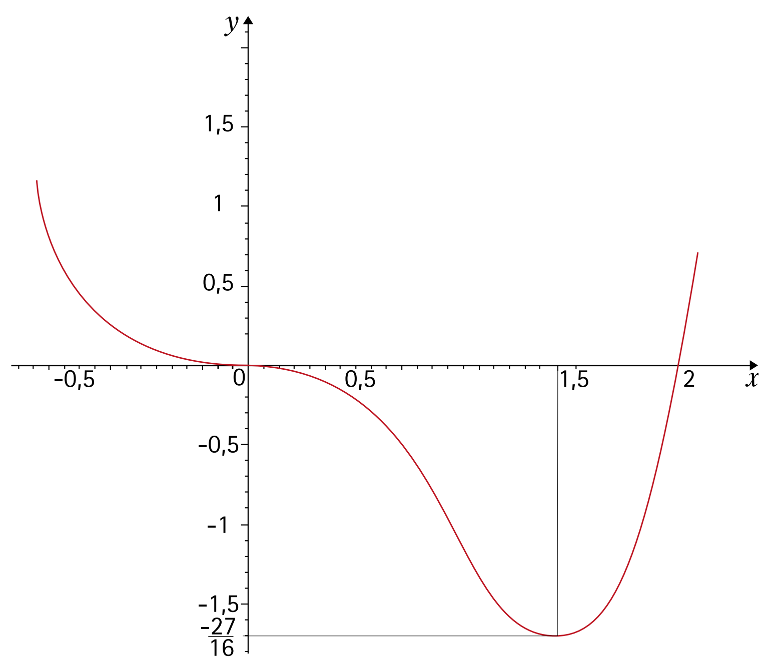


Figura 3.15

EXERCÍCIOS

1) Mostre a propriedade 1:

Propriedade 1: Seja f uma função diferenciável em um intervalo I.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I.

c) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então f é constante em I.

Demonstração:

a) Tome $x, y \in I$ com $y > x$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $c \in I$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Da hipótese $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ temos que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0.$$

Logo $f(y) > f(x)$. Isto vale para qualquer par $x, y \in I$. Logo f é uma função crescente.

b) Como exercício, demonstre b).

c) Tome os valores $f(a)$ e $f(x)$ com $x \in I[a, b]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $c \in I$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Da hipótese $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ temos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0.$$

Logo $f(x) = f(a)$. Isto vale para qualquer $x \in I$. Logo f é uma função constante.

2) Faça o gráfico das funções abaixo seguindo o roteiro:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Em muitas situações, é mais fácil resolvermos os problemas quando a função está na forma fatorada.

Dica: 1 é raiz de $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Encontre as outras.

Para encontrar as outras raízes, divida $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x - 1$, para ter $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)$(*polinômio do segundo grau*).

Os livros de matemática da 7ª Série, costumam tratar de divisão de polinômios. Sugerimos a leitura de *Matemática na Medida Certa* por Jakubo e Lellis.

O aluno encontrará divisão de polinômios na página

http://www.ucs.br/ccet/deme/naem/seminarioiii/Polinomios/Web2/conteudo.html#_Divisão_De_Polinômios

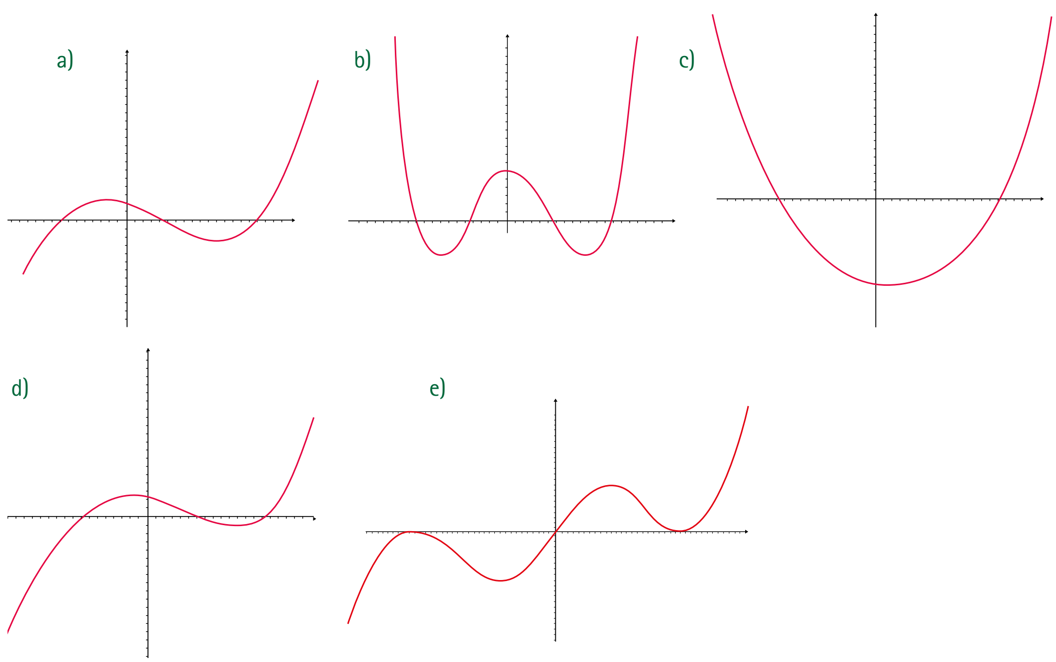
b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

c) $f(x) = 6x^2 - x - 2$.

d) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 3x + 2$.

e) $f(x) = x(x^2 - 1)^2$.

Respostas:



3.14 PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Nesta seção, usaremos o estudo de valor máximo e valor mínimo de uma função para resolver problemas práticos. Por exemplo, como obter lucro máximo para certa atividade empresarial. Vamos definir máximo e mínimo local de uma função:

Definições

Diz-se que uma função f possui um ponto de máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em uma vizinhança de c.

Diz-se que uma função f possui um ponto de mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em uma vizinhança de c.

Os máximos e mínimos locais são chamados de valores extremos locais.

- EXEMPLO 1: A função $f(x) = x(x^2 - 1)^2$ definida em $\mathbb{R}$, de gráfico

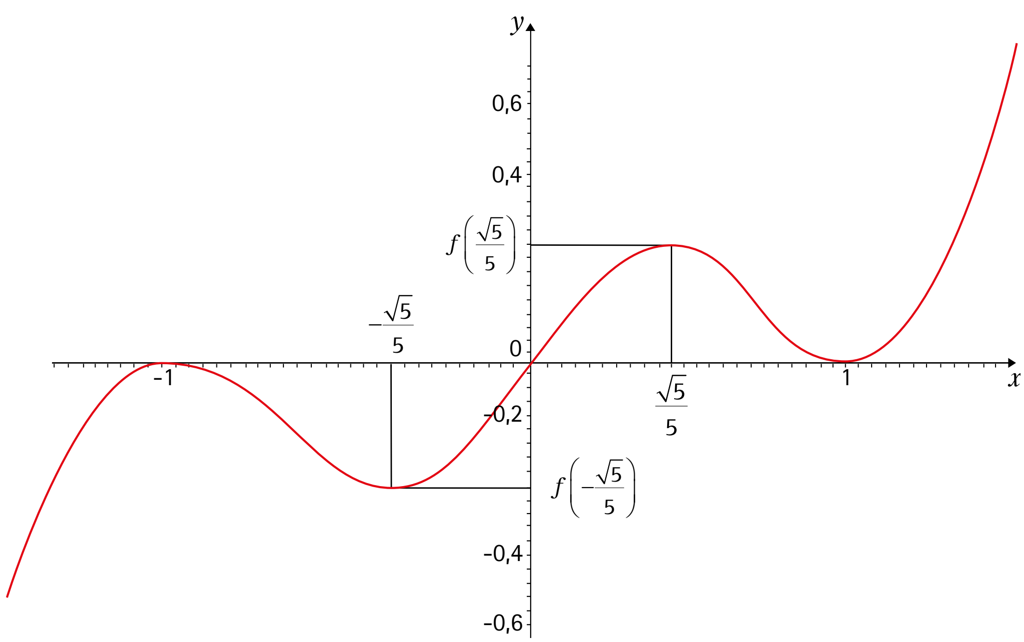


Figura 3.16

possui mínimo local em $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e em $x = 1$, e possui ainda máximos locais em $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e em $x = -1$. Olhe de perto o gráfico da função em torno de x = −1

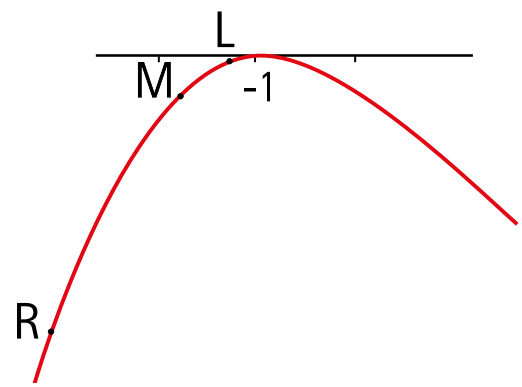


Figura 3.17

para ver que no ponto R a função cresce rapidamente (derivada alta), no ponto M cresce moderadamente (derivada moderada), no ponto L cresce lentamente (derivada baixa) e no ponto P parou de crescer (derivada zero), pois é onde a inclinação da reta tangente à curva é zero.

Definições

Diz-se que uma função f com domínio I possui um ponto de máximo absoluto em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x no domínio I. Neste caso, o valor $f(c)$ será chamado de valor máximo de f em I.

Diz-se que uma função f possui um ponto de mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x no domínio I. Nesse caso, o valor $f(c)$ será chamado de valor mínimo de f em I.

Os máximos e mínimos absolutos são chamados de valores extremos.

- EXEMPLO 2: Uma função com domínio I e gráfico como abaixo,

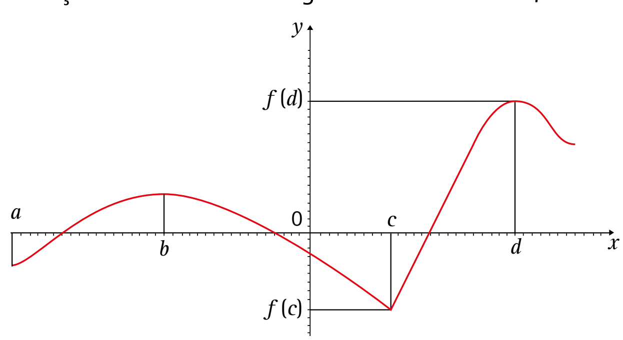


Figura 3.18

possui máximos locais em b, d e mínimos locais em a, c, e. O máximo absoluto está em d e o mínimo absoluto em c. O valor máximo absoluto pela função é $f(d)$, enquanto o mínimo absoluto é $f(c)$

O exemplo acima exibe c como mínimo local, mas sem que exista $f'(c)$.

Essa observação motiva-nos a apresentar o seguinte resultado:

Teorema

Se f assume um máximo ou um mínimo local em c, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Demonstração: Admita que f assume um máximo em c. Se $f'(c)$ não existe então não há o que fazer. Suponha que $f'(c)$ existe. Há três possibilidades $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ ou $f'(c) = 0$. Mostremos que as duas primeiras não podem ser verdadeiras:

Caso $f'(c) > 0$. Então em uma vizinhança de c a função f é crescente, ou seja, existe um número x, $x > c$ na vizinhança de c tal que $f(c) < f(x)$ contrariando o fato de c ser máximo local.

Caso $f'(c) < 0$ Então em uma vizinhança de c a função f é decrescente, ou seja, existe $x < c$ na vizinhança tal que $f(c) < f(x)$ contrariando o fato de c ser máximo local.

Só resta a opção $f'(c) = 0$.

Admita que f assume um mínimo local e mostre analogamente ao caso anterior que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Esse teorema afirma que os pontos de máximo e mínimo locais são pontos críticos.

EXERCÍCIOS

1) Encontre os pontos críticos da função:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 = 0.$

Resposta: $x = 1$ e $x = 2$.

b) $f(x) = x^3 - 3x + 3.$

Resposta: $x = 1$ e $x = -1$.

c) $f(x) = \cos x.$

Resposta: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Resposta: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

e) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Resposta: $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

f) $f(x) = 12x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1.$

Resposta: $x = -1$, $x = 1$ e $x = 2$.

g) $f(x) = x + \frac{1}{x}.$

Resposta: $x = -1$ e $x = 1$.

h) $f(x) = x + \frac{1}{x}.$

Resposta: Não há ponto crítico.

i) $f(x) = |x|.$

Resposta: $x = 0$, pois a derivada não existe.

j) $f(x) = |5x - 1|.$

Resposta: $x = \frac{1}{5}.$

k) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Resposta: $x = -2$.

l) $f(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 4$.

Resposta: $t = 0$ e $t = 1$.

2) Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo θ com o plano, então a magnitude da força é:

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada coeficiente de atrito $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg}\theta = \mu$.

3.15 CONCAVIDADE DO GRÁFICO

Vimos na seção anterior como o sinal de $f\,'$ implica o comportamento da função f (em relação ao seu crescimento ou decrescimento). Veremos nesta seção que, em muitos casos, a concavidade do gráfico de f está ligada ao sinal de $f\,''$.

O gráfico à esquerda da figura abaixo tem concavidade para baixo enquanto o da direita tem concavidade para cima. O aluno deve pensar na seguinte questão: sabendo que $f\,''(x)$ é negativa para todo x em um intervalo $[a,\ b]$, o que podemos afirmar sobre a concavidade de f?

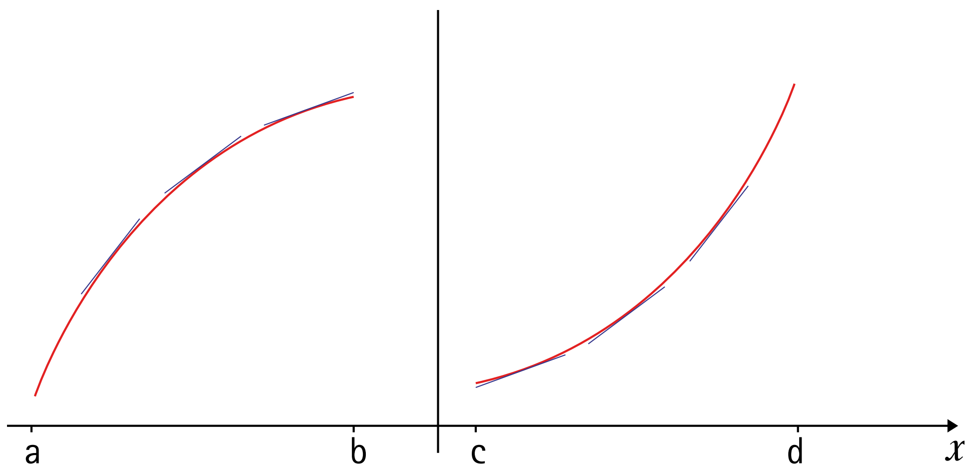


Figura 3.19

A figura à esquerda exibe retas tangentes com inclinações que decrescem, quando x se move da esquerda para a direita. Isso significa que $f\,'(x)$ decresce, quando x cresce. Na seção anterior, vimos que uma função g tem derivada negativa em um intervalo se, e somente se g é uma função decrescente. Logo a derivada de $f\,'$ é negativa para todo x em $[a,\ b]$, ou seja, $f\,''(x) < 0$ para todo x em $[a,\ b]$. Deixamos como exercício, as justificativas para o fato de $f\,''(x) > 0$ para todo x em $[c,\ d]$ ser equivalente a concavidade para cima.

Teste da Concavidade

a) Se $f\,''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f tem concavidade para cima em I.

b) Se $f\,''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.

• EXEMPLO 1: A função $f(x) = x^3$ tem segunda derivada $f''(x) = 6x$ e, portanto concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 0]$ e concavidade para cima no intervalo $[0, \infty)$. O ponto $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto onde o gráfico de f muda de concavidade.

Definição

Chama-se ponto de inflexão o ponto do gráfico em que a função muda de concavidade.

O ponto de inflexão é também o ponto em que a segunda derivada muda de sinal.

• EXEMPLO 2: A função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ do exercício 2.a) da seção "Aplicações da Derivada" tem $f''(x) = 6x - 4$. Veja que $f''(x)$ muda de sinal em $x = \frac{2}{3}$. Logo o ponto $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$ é um ponto de inflexão.

Como o ponto de inflexão tem que pertencer ao gráfico, então a abscissa tem que pertencer ao domínio da função. Se a função possuir segunda derivada em todos os pontos do domínio, então o melhor candidato para a abscissa do ponto de inflexão é o ponto x em que $f''(x) = 0$. Devemos alertar que nem sempre o ponto x em que $f''(x) = 0$ é ponto de inflexão. A função $g(x) = x^4$ tem $g''(0) = 0$ mas a concavidade de g é para cima em todo conjunto $\mathbb{R}$.

• EXEMPLO 3: Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ explicitando:

a) Domínio.

b) Pontos críticos.

c) Intervalos em que f é crescente ou decrescente.

d) Pontos de inflexão.

e) Concavidades.

f) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Solução:

a) O domínio de f é igual ao conjunto dos números reais não-nulos.

b) A derivada de f é

$$f\,'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

A derivada de f existe em qualquer ponto do seu domínio. Logo, se c é ponto crítico de f então $0 = f\,'(c) = -\frac{1}{c^2} + \frac{2}{c^3} = \frac{2-c}{c^3}$, seja, $c = 2$.

c) O sinal de $f\,'(x) = \frac{2-x}{x^3}$ é o produto dos sinais do numerador $2 - x$ e do denominador $\frac{1}{x^3}$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$2-x$	+ +	|	+ +	|	- - -
$\frac{1}{x^3}$	- - -	|	+ +	|	+ +
$f\,'(x) = \frac{2-x}{x^3}$	- - -	|	+ +	|	- - -

Vemos acima que $f\,'(x) > 0$ no intervalo $(0, 2)$ e $f\,'(x) < 0$ na união $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Portanto f é decrescente $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, 2)$ e decrescente em $(2, \infty)$.

d) Para estudar os pontos de inflexão, olhemos para a derivada segunda

$$f\,''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}.$$

O denominador x^4 é sempre positivo para $x \neq 0$. O numerador muda de sinal em $x = 3$. Isto mostra que a segunda derivada muda de sinal em $x = 3$. Portanto o ponto $(3, f(3)) = \left(3, \frac{2}{9}\right)$ é um ponto de inflexão de f.

e) De acordo com o sinal da derivada segunda abaixo

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$2x-6$	- - -	|	- - -	|	+ + +
$\frac{1}{x^4}$	+ + +	|	+ + +	|	+ + +
$f\,''(x) = \frac{2x-6}{x^4}$	- - -	|	- - -	|	+ + +

a concavidade de f é para baixo no intervalo $(-\infty, 3)$ e para cima no intervalo $(3, \infty)$.

f) Veja que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Agora você deve usar as informações acima para ver que o gráfico de f é:

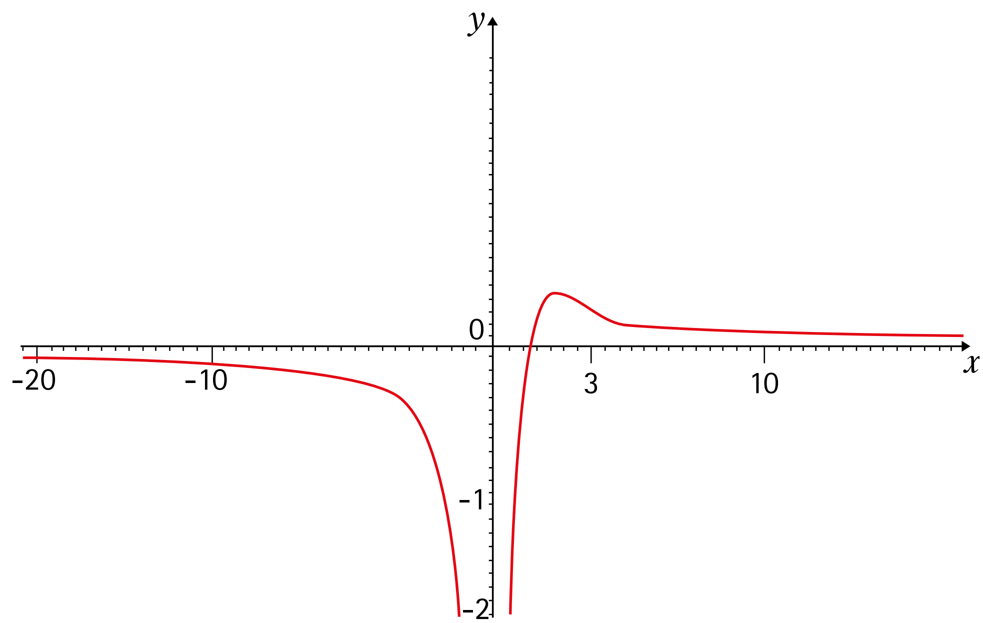
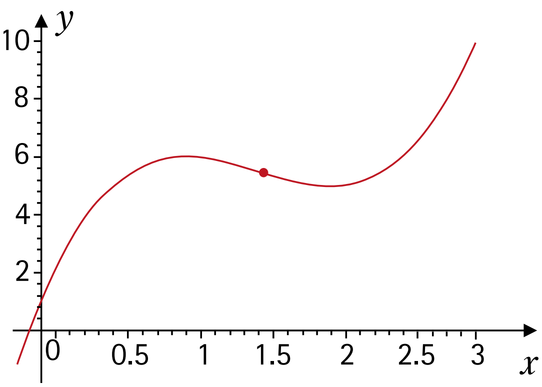


Figura 3.20

1) Esboce o gráfico da função f explicitando domínio, pontos críticos, intervalos em que f é crescente ou decrescente, pontos de inflexão, concavidades, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. E nos pontos $x = c$ em que f não estiver definida, calcule os limites laterais $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim_{x\to c^+} f(x)$.

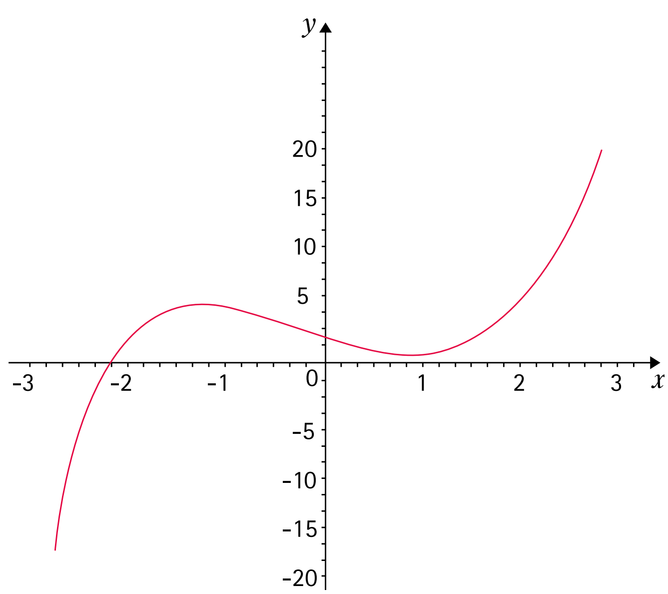
a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 = 0$.

Domínio: $\mathbb{R}$. Pontos críticos: $x = 1$ e $x = 2$. Crescente em $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ e decrescente em $[1,2]$. Inflexão em $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$. Concavidade para baixo em $(-\infty, \frac{3}{2}]$. Concavidade para cima em $[\frac{3}{2}, \infty)$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

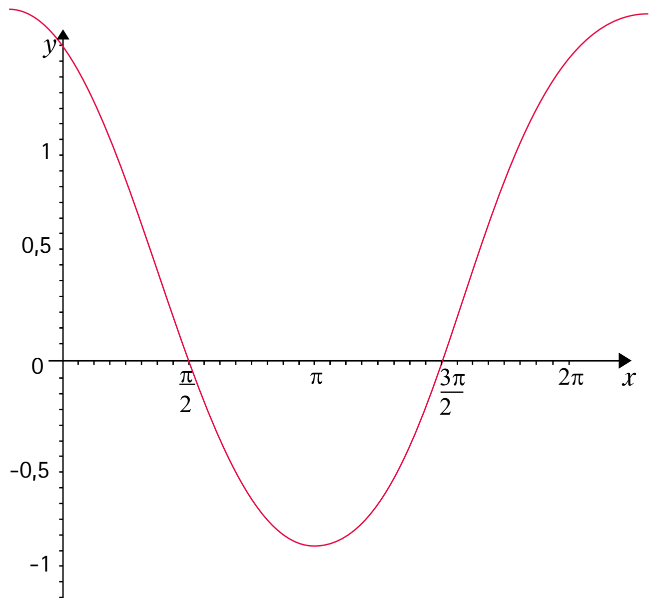
Domínio: $\mathbb{R}$. Pontos críticos: $x = 1$ e $x = -1$. Crescente em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e decrescente em $[-1, 1]$. Inflexão em $(0, 3)$. Concavidade para baixo em $(-\infty, 0]$. Concavidade para cima em $[0, \infty)$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



EXERCÍCIOS

c) $f(x) = \cos x$, com $x \in [0, 2\pi]$.

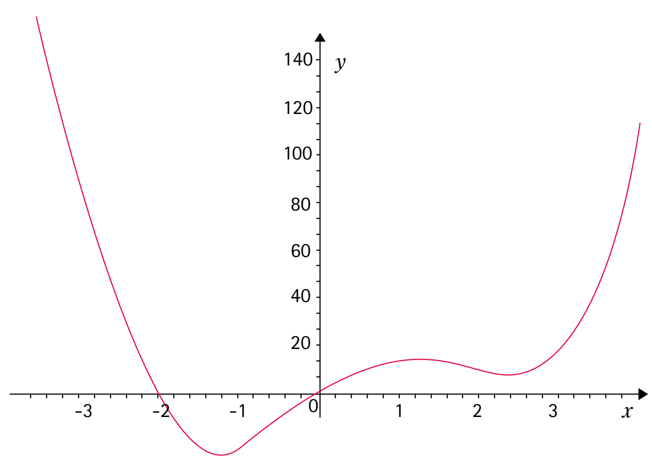
Domínio: $[0, 2\pi]$. Pontos críticos: $x = 0$, π, 2π. Crescente em $[\pi, 2\pi]$ e decrescente em $[0, \pi]$. Inflexões em $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. Concavidade para baixo em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ Concavidade para cima em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.



d) $f(x) = \text{sen}\, x$ com $x \in [0, 2\pi]$. Faça este.

e) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1$.

Domínio: $\mathbb{R}$. Pontos críticos: $x = -1$, 1 e 2. Crescente em $[-1, 1] \cup [2, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1) \cup [1,2]$. Inflexão em $(a, f(a))$ para $a = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$ e $a = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$. Concavidade para cima em $\left(-\infty, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$. Concavidade para baixo em $\left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right]$. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.



3.16 LIMITES NO INFINITO E ASSÍNTOTAS

Dizemos que um limite é infinito se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

De modo análogo, podemos pensar em um limite que é "menos infinito".

Agora, usamos a expressão "limites no infinito" para limites onde x se torna um número muito grande, a ponto de dizermos que x tende ao infinito, ou seja, são limites do tipo

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

De modo análogo, podemos pensar em

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Dadas duas funções f e g o que acontece com a razão

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

quando x tende ao infinito?

Perguntas desse tipo serão respondidas aqui. Comecemos com a pergunta:

- EXEMPLO 1: O que acontece com x^2 quando x tende ao infinito?

A resposta desta pergunta é: x^2 tende ao infinito. Veja:

Se $x = 10$ então $x^2 = 100$.

Se $x = 30$ então $x^2 = 900$.

Se $x = 100$ então $x^2 = 10000$.

Se $x = 10000$ então $x^2 = 100000000$.

É interessante também pensarmos no gráfico da função $f(x) = x^2$ e observarmos que, quando x tende ao infinito, $f(x)$ torna-se arbitrariamente grande, ou seja, tende também ao infinito.

Analogamente, quando x tende ao "menos infinito", isto é, x assume valores arbitrariamente grandes, mas negativos, $f(x) = x^2$ também se torna arbitrariamente grande e positivo, ou seja, tende ao infinito.

EXEMPLO 2: Qualquer que seja o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ de grau n, vale que

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n,$$

ou seja, para x muito grande, $p(x)$ é muito próximo de $a_n x^n$.

A afirmação acima significa que, quando $x \to \infty$, o comportamento de $p(x)$ é comandado pelo comportamento do termo de mais alto grau desse polinômio.

A justificativa disso é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} p(x) &= \lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0) \\
&= \lim_{x\to\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} a_n x^n \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} a_n x^n .(1 + 0 + \cdots + 0) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n .
\end{aligned}$$

Agora vamos tratar os limites para funções racionais. Comecemos com a pergunta: Quando x tende para ∞, para onde tende $\frac{1}{x}$? Pense. Se x for muito grande, então $\frac{1}{x}$ será muito pequeno, ou melhor, muito próximo de zero. Digamos que x = 10000 então $\frac{1}{x}$ = 0,0001.

Quando x tende para ∞, para onde tende $\frac{2000}{x}$?Pense novamente. Se x for muito grande, então $\frac{2000}{x}$ será muito pequeno, ou melhor, muito próximo de zero. Digamos que x = 200000000 então $\frac{1}{x}$ = 0,0001.

Na verdade, qualquer que seja a constante real c teremos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x} = 0.$$

• EXEMPLO 3: Qual é o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - \frac{1}{x}\right]?$$

Solução: Já vimos que $1/x$ tende a zero quando x tende ao infinito. Portanto

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} x - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \infty - 0 = \infty.$$

• EXEMPLO 4: Qual é o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1}?$$

Solução: Veja que

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}.$$

O limite do denominador é ∞ quando x tende ao infinito. Como o numerador é constante, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = 0.$$

• EXEMPLO 5: Qual é o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1}?$$

Solução: Divida numerador e denominador por x^2. Então

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}}$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} x}{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

O exemplo acima mostra que a função $\frac{x^3}{x^2-1}$ tende ao infinito quando x tende ao infinito. Na verdade, para qualquer função racional em que o grau do numerador possuir uma unidade a mais do que o grau do denominador, então o limite no infinito será ∞ ou –∞. Sempre que, em uma função racional, o grau do numerador possuir uma unidade a mais do que o grau do denominador então a função racional é próxima de uma reta, para x muito grande. Essa reta é chamada assíntota da função racional.

A estratégia para determinar o limite de uma função racional é então dividir ambos, numerador e denominador, por x^n onde n é o maior expoente. Fazendo isso, simplificamos o processo de encontrar tal limite.

Definição

Dizemos que uma reta $y = mx + b$ é uma reta assíntota de uma função $f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$$

Uma reta assíntota tem a propriedade de ser a reta mais próxima da função, para x muito grande.

• EXEMPLO 6: No exemplo 3 da seção anterior, observando o gráfico você verá que a reta $y = 0$ é uma reta assíntota da função $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, mais conhecida como reta assíntota horizontal.

• EXEMPLO 7: Qual é a reta assíntota $mx + b$ da função racional $\frac{x^3}{x^2-1}$.

Solução: Para isso você deverá acompanhar a divisão:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x) & x \\ \hline x & \end{array}$$

Isso mostra que a divisão de x^3 por $x^2 - 1$ é igual a x com resto x, ou seja, que

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}$$

o que implica

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

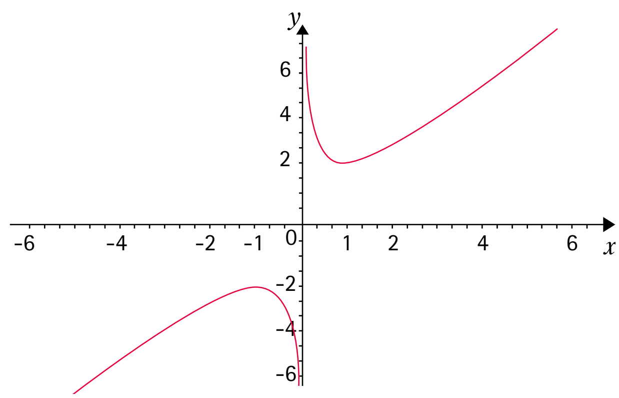
e portanto a reta $y = x$ é uma reta assíntota de $\frac{x^3}{x^2-1}$.

EXERCÍCIOS

1) Esboce o gráfico da função f explicitando domínio, pontos críticos, intervalos em que f é crescente ou decrescente, pontos de inflexão, concavidades, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Nos pontos $x = c$ em que f não estiver definida, calcule os limites laterais $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ Assíntotas.

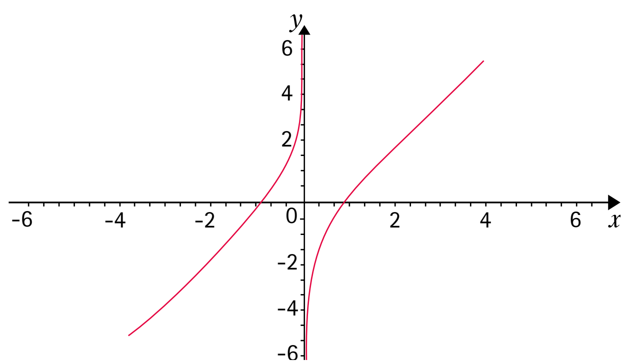
a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$. Pontos críticos: $x = -1, 1$. Crescente em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e decrescente em $[-1,0) \cup (0, 1]$. Não tem ponto de inflexão. Concavidade para baixo em $(-\infty, 0)$. Concavidade para cima em $(0, \infty)$. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$. Assíntota $y = x$.



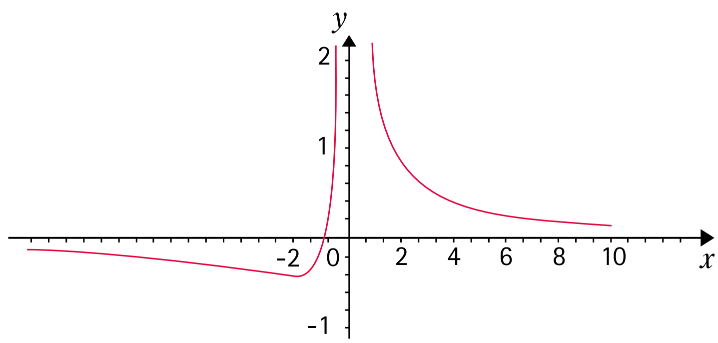
b) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$. Não há ponto crítico. Crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Não tem ponto de inflexão. Concavidade para cima em $(-\infty, 0)$. Concavidade para baixo em $(0, \infty)$. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. Assíntota $y = x$.



c) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

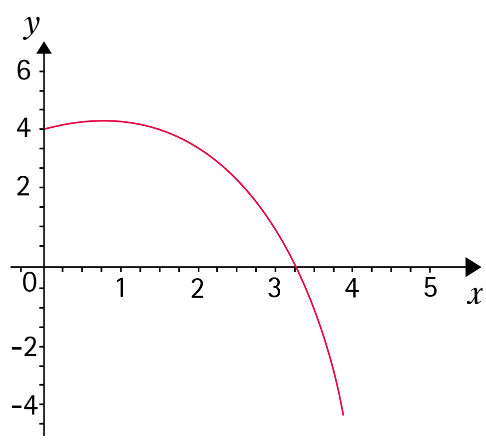
Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$. Ponto crítico $x = -2$. Decrescente em $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Crescente em $[-2, 0)$ Ponto de inflexão $(-3, f(-3))$. Concavidade para baixo em $(-\infty, -3)$. Concavidade para cima em $(-3, 0) \cup (0, \infty)$. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$. Assíntota $y = 0$.



d) $f(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 4$.

Domínio: Reais não negativos = $\mathbb{R}_+$. Ponto crítico 0, 1. Decrescente em $(1, \infty)$. Crescente em $(0, 1)$. Ponto de inflexão $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$. Concavidade para cima em $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Concavidade para baixo em $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 4$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.



3.17 DERIVADA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Qual é o número e tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1?$$

Queremos buscar um número real que atenda a esse limite, ou seja, que ele seja igual a 1. Depois, você entenderá o porquê!

Atribua valores próximos de zero para h e veja que

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}\approx 0,69$$

e

$$\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}\approx 1,10$$

Isso significa que o número e está entre 2 e 3. Sugerimos ao aluno que tente 2,7 e 2,8 para concluir que 2,7 < e < 2,8. Na verdade e é um número irracional e $e \approx 2,71828$.

Definição

Definimos o número e como sendo um número tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

PROPRIEDADE 1: A derivada da função exponencial e^x é ela mesma, ou seja,

$$\frac{d}{dx}[e^x]=e^x.$$

Demonstração:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}=e^x.1=e^x.$$

Agora basta usarmos a regra da cadeia para vermos que a propriedade 2 abaixo é verdadeira.

PROPRIEDADE 2: Se $u = u(x)$ é uma função diferenciável então

$$\frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = e^{u(x)}u'(x).$$

• EXEMPLO 1: Encontre a derivada de $f(x) = e^{x^2}$.

Solução: Queremos deixar claro que a função acima é $f(x) = e^{x^2} = e^{(x^2)}$. Pela propriedade 2,

$$f'(x) = e^{x^2}.2x = 2xe^{x^2}.$$

No Pré-Cálculo, foi definida, para x e b positivos com $b \neq 1$, a função logarítmica $\log_b x$ como sendo o número y tal que $x = b^y$.

Definição

O logaritmo natural de x é definido como o logaritmo de x na base e e denotado por $\ln x$, ou seja, $\ln x = \log_e x$.

• EXEMPLO 2: Calcule $\ln e^4$.

Solução: $\ln e^4 = \log_e e^4 = y$, tal que $e^y = e^4$. Como a função e^y tem derivada $e^y > 0$, então a função exponencial é crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ e portanto bijetiva. Logo $e^y = e^4$ implica $y = 4$ ou seja, $\ln e^4 = 4$.

Observe que isso acontece exatamente porque a função logarítmica é inversa da função exponencial. Logo, quando compomos tais funções, o resultado é tal que $f^{-1}(f(x)) = x$. Veremos melhor isso adiante.

Propriedades

O logaritmo natural herda todas as propriedades dos logaritmos.

Há uma propriedade que deve ser destacada:

$$\ln e^{x} = x \qquad \text{e} \qquad e^{\ln x} = x,$$

para todo $x \geq 0$.

Como visto no exemplo acima, a função exponencial é bijetiva, portanto possui inversa. A função $\ln x$ é a função inversa da função exponencial e^x e, portanto diferenciável. Na propriedade 2 acima, em lugar de $u(x)$ coloque $\ln x$ para ter a propriedade:

PROPRIEDADE 3: A derivada da função logarítmica $\ln x$ é $\frac{1}{x}$, para todo $x \geq 0$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Demonstração: Veja que $x = e^{\ln x}$, para todo $x \geq 0$. Derivando ambos os membros em relação a x, temos

$$1 = \frac{d}{dx}[e^{\ln x}] = e^{\ln x}.\frac{d}{dx}[\ln x] = x\frac{d}{dx}[\ln x].$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

PROPRIEDADE 4: Se $u = u(x)$ é uma função diferenciável então, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u(x)}u'(x).$$

- EXEMPLO 3: Encontre a derivada de $f(x) = \ln x^2$.

Solução: Queremos deixar claro que $f(x) = \ln x^2 = \ln(x^2)$. Pela propriedade 4, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x}.$$

• EXEMPLO 4: Encontre a derivada de $f(x) = 2^x$

Solução: Lembre-se que

$$2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x(\ln 2)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}[2^x] = e^{x(\ln 2)}.\ln 2 = (\ln 2)e^{\ln(2^x)} = (\ln 2)2^x.$$

EXERCÍCIOS

1) Mostre que

$$\ln e^x = x \qquad \text{e} \qquad e^{\ln x} = x,$$

para todo $x \geq 0$.

2) Mostre que:

a) A imagem da função $\ln x$ tem imagem $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

3) Encontre a derivada das funções:

a) $f(x) = e^{1-x}$. Resposta: $f'(x) = -e^{1-x}$.

b) $f(x) = e^{1-2x}$. Resposta: $f(x) = -2e^{1-2x}$.

c) $f(x) = e^{x^2+3x-1}$. Resposta: $f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$.

d) $f(x) = \ln(1-5x)$. Resposta: $f'(x) = -\frac{5}{1-5x}$.

e) $f(x)=\ln x^3$. Resposta: $f'(x) = \frac{3}{x}$.

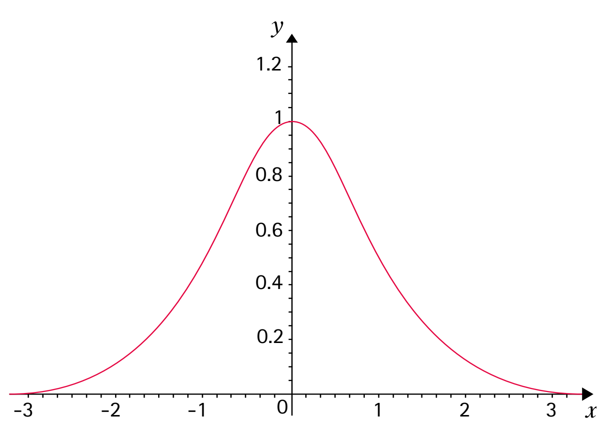
f) $f(x) = \ln(1-5x+3x^2)$. Resposta: $f'(x) = \frac{6x-5}{1-5x+3x^2}$.

g) $f(x) = 3^x$. Resposta: $f'(x) = (\ln 3)3^x$.

h) $f(x) = \pi^x$. Resposta: $f'(x) = (\ln\pi)\ \pi x$.

i) $f(x) = a^x$, para $a > 0$. Resposta: $f'(x) = (\ln a)\ a^x$.

4) Faça o gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$ (observe que está implícito encontrar pontos críticos, de inflexão, concavidades e limites no infinito).



3.18 REGRA DE L'HÔPITAL

Antes de iniciarmos esta seção é importante lembrar que não está definida a divisão por zero. Nem mesmo a divisão de 0 por 0 está definida. Dizemos que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação ou uma forma indeterminada.

Você já sabe que a função $\ln x$ é diferenciável e que $\ln 1 = 0$. De posse disso, perguntamos:

1) Qual é o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}?$$

Observe que ambos, numerador e denominador, tendem a zero. Dizemos então que essa é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, a regra de L'Hôpital é aplicável. A descoberta da regra de L'Hôpital é atribuída ao matemático John Bernoulli. O nome Regra de L'Hôpital é uma homenagem ao marquês de St. Mesme (França), Guillaume François Antoine de L'Hôpital, que foi autor do primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que sua regra aparece pela primeira vez.

Teorema: Regra de L'Hôpital

Suponha que $f(a) = g(a) = 0$ e que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Veja que

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Usaremos a forma mais avançada da regra.

Teorema: Regra de L'Hôpital (Forma mais avançada).

Suponha que $f(a) = g(a) = 0$ e que f e g sejam diferenciáveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$. Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Não demonstraremos aqui a forma avançada da regra de L'Hôpital. Você pode pesquisar e estudar essa demonstração em algum livro de cálculo.

- EXEMPLO 1: Qual é o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}?$$

Solução: Observe que numerador e denominador tendem a zero. Essa é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. A derivada do numerador é $\frac{1}{x}$ e a do denominador é 1. Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

A regra de L'Hôpital também é válida para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

- EXEMPLO 2: Qual é o limite

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x-1}?$$

Solução: Observe que o numerador e o denominador tendem a ∞ quando x tendem a ∞. Essa é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. A derivada do numerador é $\frac{1}{x}$ e a do denominador é 1. Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

• EXEMPLO 3: Qual é o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}?$$

Solução: Observe que o numerador e o denominador tendem a ∞ quando x tendem a 0 pela direita. Essa é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. A derivada do numerador é $\frac{1}{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x}$ e a do denominador é $-\frac{1}{x^2}$. Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} x = 0.$$

• EXEMPLO 4: Qual é a interpretação de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0?$$

Resposta: Isso significa que, para x muito grande, a razão $\frac{\ln x}{x-1}$ está muito próxima de zero, ou seja, o numerador é muito pequeno em relação ao denominador. Não é exagero dizer que o numerador é insignificante perto do denominador. É costumeiro dizer que o denominador $x - 1$ tende para ∞ muito mais rápido do que o numerador $\ln x$.

• EXEMPLO 5: Qual das funções e^x e x^2 "cresce mais rápido" para o infinito?

Solução: Para responder isso, deveremos calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Se o limite for 0 então significará que o denominador tende mais rápido. Se for uma constante, então significará que ambos, numerador e denominador, tendem para o infinito de forma proporcional. Se for ∞ então significará que o numerador tende mais rápido para o infinito.

Veja que o limite em questão é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Continuamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Precisamos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez para ter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Ainda explorando esse exemplo, exibimos abaixo os gráficos das funções e^x e x^2. Veja que há três pontos de interseções entre os gráficos e que para $x > 7$, e^x é sempre maior do que x^2. Está exibido ainda o gráfico da diferença $e^x - x^2$, onde mostra que para x grande a diferença $e^x - x^2$ é muito maior.

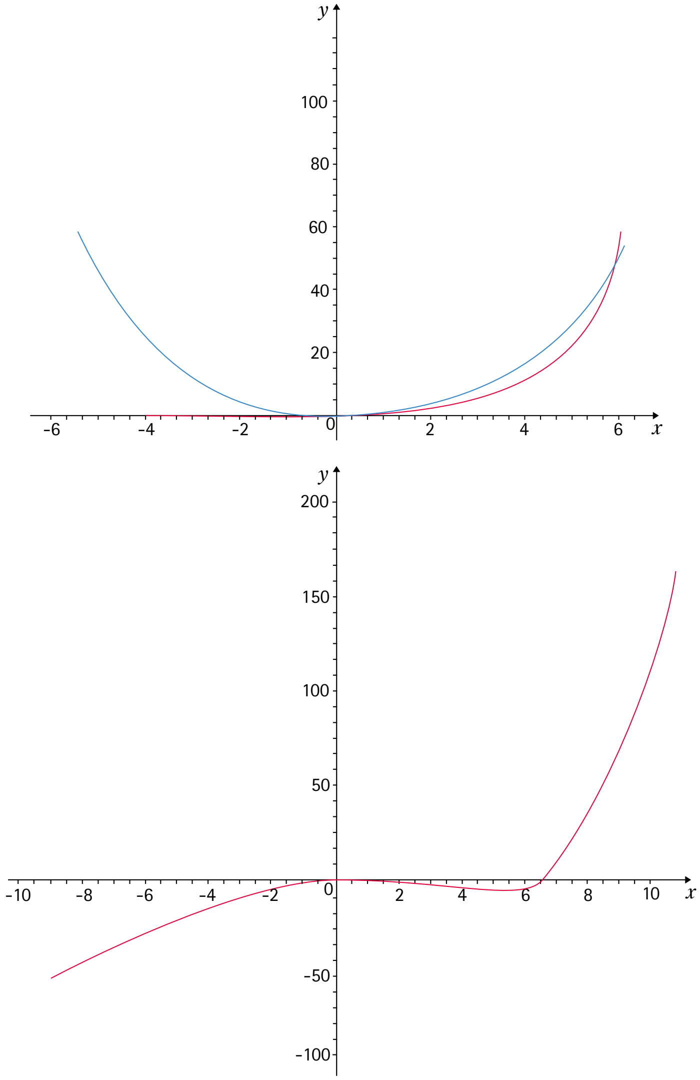


Figura 3.21

Para outros tipos de indeterminação, recomendamos o sítio

http://www.pucrs.br/famat/demat/eng/calculo_I/files/geral/LHopital_20072.pdf

e a leitura de outros livros textos tais como:

1) Cálculo: George B. Thomas, volume 1, décima edição, Addison Wesley.

2) Cálculo: James Stewart, volume 1, quinta edição, CENGAGE Learning.

EXERCÍCIOS

1) Use a regra de L'Hôpital para mostrar que:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$

2) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}.$

Resposta: ∞.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}.$

Resposta: $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right).$ Sugestão: $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$. O limite desta última expressão é do tipo $\frac{0}{0}$.

Resposta: 0.

3) Quando x tende ao infinito, qual das funções f ou g cresce mais rápido para o infinito?

a) $f(x) = \ln x$ ou $g(x) = \sqrt{x}$?

Resposta: $\sqrt{x}$

b) $f(x) = \ln x$ ou $g(x) = -x$?

Resposta: $-x$

c) $f(x) = e^x$ ou $g(x) = x^3$?

Resposta: e^x

4. ANTIDERIVADAS

4.1 O CONCEITO DE ANTIDERIVADA

Neste capítulo, vamos estudar as antiderivadas e o método de Integração. Veremos no final deste fascículo que o processo de derivação e o processo de integração estão intimamente relacionados.

Um dos exemplos de aplicação de antiderivadas é encontrar a posição $S(t)$ conhecendo a velocidade $v(t)$. Sabendo que a derivada da posição $S(t)$ é a velocidade $v(t)$ e conhecendo a velocidade, é possível encontrar a posição usando a operação inversa da derivação que chamaremos de antiderivação ou integração. A posição $S(t)$ será chamada de antiderivada da velocidade $v(t)$.

Assim, dada uma função, a busca por antiderivadas dela equivale à busca por funções cujas derivadas são exatamente a função proposta.

Definição

Uma função F é denominada uma antiderivada de f de domínio em um intervalo I se $F\,'(x) = f\,(x)$ para todo x em I.

O nome antiderivada é bem próprio. Uma antiderivada de uma função f é uma outra função F cuja derivada é f.

- EXEMPLO 1: Qual é a função F cuja derivada é a função constante $f\,(x) = 1$?

  Solução: Perceba que a pergunta é o mesmo que procurar a antiderivada de $f\,(x) = 1$.

Lembre de que

$$\frac{d}{dx}[x] = 1.$$

Portanto x é uma antiderivada de $f(x) = 1$.

Podemos ver também, por exemplo, que $\frac{d}{dx}[x + 10] = 1$, logo a função $x + 10$ é uma antiderivada de $f(x) = 1$.

- EXEMPLO 2: Qual é a função F cuja derivada é $f(x) = x$?

Solução: Perceba que a pergunta é o mesmo que procurar a antiderivada de $f(x) = x$.

Lembre de que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}\right] = x.$$

Portanto $\frac{x^2}{2}$ é uma antiderivada de $f(x) = x$. Existem outras antiderivadas de $f(x) = x$. Veja que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2} + 5\right] = x.$$

Isto mostra que $\frac{x^2}{2} + 5$ é uma outra antiderivada de $f(x) = x$. De forma geral, uma antiderivada de $f(x) = x$ é uma função da forma

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c,$$

em que c é uma constante. Por esse motivo, a função acima é chamada de antiderivada geral de $f(x) = x$.

Definição

Digamos que uma função f, de uma variável x, possua uma antiderivada F. Define-se a antiderivada geral de f como sendo a função $G(x) = F(x) + c$, onde c é uma constante. A antiderivada geral de f será denotada por

$$\int f(x)dx,$$

cuja notação é conhecida como a integral indefinida de f em relação a variável x.

Conforme Eves (2004, 442), o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, que foi um dos inventores do Cálculo, utilizou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado por conta da primeira letra da palavra *summa*, que significa soma em latim. Isso ocorreu em 29 de outubro de 1675. A finalidade de Leibniz era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois, já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje.

• EXEMPLO 3: Qual é a integral indefinida de $f(x) = x^2$?

Solução: Como $\frac{x^3}{3}$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2$ então a integral indefinida (ou antiderivada geral) é

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c,$$

onde c é uma constante.

Para o aluno ter a certeza de que $\frac{x^3}{3} + c$ é a integral indefinida de x^2, basta o aluno derivar a função $\frac{x^3}{3} + c$ em relação a x e ver que dá igual a x^2. Fazendo a conta, temos

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} + c\right] = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}[x^3] + \frac{d}{dx}[c] = \frac{1}{3}.3x^2 + 0 = x^2.$$

• EXEMPLO 4: Qual é a integral indefinida de $f(x) = x^n$, para $n \neq -1$?

Solução: A antiderivada geral de $f(x) = x^n$ é

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

onde c é uma constante. Para confirmar, vamos derivar como segue:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right] = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\left[x^{n+1}\right] + \frac{d}{dx}[c] = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n + 0 = x^n.$$

Você deve recordar que escrevemos um procedimento para calcularmos a derivada de um monômio. Faremos o mesmo para calcular a integral indefinida de um monômio $f(x) = x^n$.

1) Some 1 ao expoente para ter x^{n+1}.

2) Divida por $n + 1$.

3) Adicione a constante c.

4) O resultado é

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

O exemplo 4 acima deixa a seguinte pergunta: Qual é a integral indefinida de $f(x) = x^n$, para $n = -1$? O exemplo 5 responde.

• EXEMPLO 5: Qual é a integral indefinida de $f(x) = \frac{1}{x}$?

Solução: No capítulo anterior, vimos que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Portanto a integral indefinida de $f(x) = \frac{1}{x}$ é

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c,$$

onde c é uma constante.

• EXEMPLO 6: Qual é a função f cuja derivada $f'(x) = e^x$ e que passa pelo gráfico de f no ponto (0, 1), ou seja, com $f(0) = 1$?

Solução: Conforme visto no capítulo anterior,

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x.$$

Logo a antiderivada geral de $f'(x) = e^x$ é

$$\int e^x\, dx = e^x + c,$$

onde c é uma constante. Existe apenas uma antiderivada da forma $f(x) = e^x + c$, com $f(0) = 1$, ou seja, devemos encontrar o número c que permita $f(x)$ satisfazer as duas condições acima. Para que $f(0)$ seja igual a 1 é necessário que

$$1 = f(0) = e^0 + c = 1 + c.$$

Logo $c = 0$ e

$$f(x) = e^x$$

• EXEMPLO 7: Encontre f tal que $f'(x) = \operatorname{sen} x$ com $f(0) = 1$.

Solução: Sabemos que

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x.$$

Logo

$$\frac{d}{dx}[-\cos x] = -\frac{d}{dx}[\cos x] = -(-\text{sen}x) = \text{sen}x.$$

E a integral indefinida de $f\,'(x) = \text{sen}x$ é

$$\int \text{sen}x \;dx = -\cos x + c,$$

onde c é uma constante. Para encontrar a constante, devemos fazer

$$1 = f(0) = -\cos 0 + c = -1 + c.$$

Isto significa que $c = 1 + 1 = 2$ e

$$f(x) = -\cos x + 2.$$

Nos exemplos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 o aluno viu as integrais indefinidas de x, x^2, x^n, $\frac{1}{x}$, e^x, $\text{sen}x$. O aluno pode perguntar agora:

a) Como determinar a integral indefinida de uma dessas funções multiplicada por um número real, digamos a segunda multiplicada por 3, ou seja $3x^2$?

b) E a integral indefinida de uma combinação linear dessas funções, ou seja, uma soma dessas funções multiplicadas por escalares?

• EXEMPLO 8: Encontre a integral indefinida da função $f(x) = 3x - \pi x^2 + \sqrt{2}\ \text{sen}x$.

Solução: Deixamos para o aluno verificar que a integral indefinida de f é

$$\int f(x)dx = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\pi}{3}x^3 - \sqrt{2}\cos x + c$$

Derive a função $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\pi}{3}x^3 - \sqrt{2}\cos x + c$ e verifique que a derivada é exatamente $f(x)$.

Assim como a derivada da soma é a soma das derivadas, a integral indefinida de uma soma é a soma das integrais indefinidas e mais: a integral indefinida de uma função f multiplicada por um escalar é igual o produto do escalar pela integral indefinida de f. Veja as propriedades:

PROPRIEDADES: Sejam f e g duas funções de mesmo domínio e que possuam antiderivadas. Então:

a) $$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

b) $$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ para todo } c \in \mathbb{R}.$$

• EXEMPLO 9: Conhecendo a função velocidade $a(t) = 3t + 1$, encontre:

a) A função velocidade $v(t)$ sabendo que $v(0) = 10\ km/h$.

b) A função posição $S(t)$ sabendo que $S(0) = 0\ km$.

Solução de a):

De acordo com o que estudamos no capítulo anterior, a derivada da velocidade $v(t)$ é a aceleração $a(t)$, ou seja, a velocidade é uma antiderivada da aceleração e a antiderivada geral da aceleração $a(t) = 3t + 1$ é

$$v(t) = \int a(t)dt = \frac{3}{2}t^2 + t + c,$$

onde c é uma constante. Sabendo que $v(0) = 10\ km/h$, temos

$$10 = v(0) = \frac{3}{2}.0^2 + 0 + c,$$

o que implica $c = 10\ km/h$ e portanto $v(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + 10$.

Solução de b):

Do mesmo modo do item **a** e, de acordo com o capítulo anterior, a derivada da posição $S(t)$ é a velocidade $v(t)$, ou seja, a posição é uma antiderivada da velocidade e a antiderivada geral da velocidade $v(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + 10$ é

$$S(t) = \int v(t)dt = \frac{1}{2}t^3 + \frac{t^2}{2} + 10t + k,$$

onde k é uma constante. Sabendo que $S(0) = 0\ km$, temos

$$0 = S(0) = \frac{1}{2}.0^3 + \frac{0^2}{2} + 10.0 + k = k.$$

Logo

$$S(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{t^2}{2} + 10t.$$

EXERCÍCIOS

1) Encontre a integral indefinida das funções:

a) $f(x) = \sqrt{3}$. Resposta: $\sqrt{3}\,x + c$.

b) $f(x) = \sqrt{3} + x$. Resposta: $\sqrt{3} + \frac{x^2}{2} + c$.

c) $f(x) = \sqrt{3} + 2x$. Resposta: $\sqrt{3} + x^2 + c$.

d) $f(x) = \sqrt{3} + 2x - x^2$. Resposta: $\sqrt{3} + x^2 - \frac{x^3}{3} + c$.

e) $f(x) = \sqrt{3} + 2x - 3x^2$. Resposta: $\sqrt{3} + x^2 - x^3 + c$.

f) $f(x) = \sqrt{3} + 2x - 3x^2 + 4x^3$. Resposta: $\sqrt{3} + x^2 - x^3 + x^4 + c$.

g) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}$ Resposta: $\sqrt{3}\ln x + c$.

h) $f(x) = \sqrt{3}\,e^x$. Resposta: $\sqrt{3}\,e^x + c$.

i) $f(x) = \sqrt{3}\,e^x - \frac{1}{x}$. Resposta: $\sqrt{3}\,e^x - \ln x + c$.

j) $f(x) = \cos x$. Resposta: $\operatorname{sen} x + c$.

k) $f(x) = -\cos x$. Resposta: $-\operatorname{sen} x + c$.

l) $f(x) = (\sec x)^2$. Resposta: $\tan x + c$.

2) Encontre a integral indefinida das funções com $f(0) = 1$:

a) $f(x) = \sqrt{3}$. Resposta: $\sqrt{3}\,x + 1$.

b) $f(x) = \sqrt{3} + x$. Resposta: $\sqrt{3} + \frac{x^2}{2} + 1$.

c) $f(x) = \sqrt{3}\,e^x$. Resposta: $\sqrt{3}\,e^x + 1 - \sqrt{3}$

d) $f(x) = \cos x$. Resposta: $\operatorname{sen} x + 1$.

EXERCÍCIOS

3) Encontre a integral indefinida das funções com $f(1) = -1$:

a) $f(x) = \sqrt{3}$. Resposta: $\sqrt{3}\,x - 1 - \sqrt{3}$.

b) $f(x) = \sqrt{3} + x$. Resposta: $\sqrt{3}\,x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} - \sqrt{3}$.

c) $f(x) = \sqrt{3}\,e^x$. Resposta: $\sqrt{3}\,e^x - 1 - \sqrt{3}\,e$. Use $e^1 = e$.

4) Supondo f uma função diferenciável, pergunta-se:

a) Qual é a integral indefinida da função $f'(x)$ Resposta: $f(x) + c$.

b) Qual é a derivada em relação a x, da função $F(x) = \int f(x)dx$? Resposta: $f(x)$.

5) Conhecendo a função aceleração $a(t) = 5t - 1$, encontre:

a) A função velocidade $v(t)$ sabendo que $v(0) = 30\ km/h$.

Resposta: $v(t) = \frac{5}{2}t^2 - t + 30$

b) A função posição $S(t)$ sabendo que $S(0) = 0\ km$.

Resposta: $\frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 30t$.

6) Conhecendo a função aceleração $a(t) = 1 - \operatorname{sen} t$, encontre:

a) A função velocidade $v(t)$ sabendo que $v(\pi) = 30\ km/h$.

Resposta: $v(t) = t + \cos t + 31 - \pi$.

b) A função posição $S(t)$ sabendo que $S(\pi) = 0\ km$.

Resposta: $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + \operatorname{sen} t + (31 - \pi)t - 31\pi + \frac{\pi^2}{2}$.

4.2 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

A partir do conhecido na seção anterior, você saberia calcular a integral indefinida de $f(x) = (5x-1)^2$. E de $g(x) = \frac{\ln x}{x}$?

A integração por substituição é um método que facilita o cálculo de algumas integrais indefinidas. Agora faremos um exemplo sem o uso do método de integração por substituição e logo em seguida usaremos o método.

• EXEMPLO 1: Encontre

$$\int (5x-1)^2\,dx.$$

Solução:

Uma primeira tentativa de encontrar a integral indefinida acima pode nos levar a desenvolver o termo $(5x - 1)^2$ para depois integrarmos cada termo, visto as propriedades anteriores.

Vejamos: $(5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1) = 25x^2 - 10x + 1$.

Agora, podemos resolver a integral indefinida proposta usando a propriedade já vista de que a integral da soma de funções integráveis, é a soma das integrais. Vejamos:

$$\int (5x-1)^2\,dx = \int (25x^2 - 10x + 1)dx = \int 25x^2 dx - \int 10x dx + \int 1 dx =$$
$$\frac{25}{3}x^3 + c_1 - \frac{10}{2}x^2 + c_2 + x + c_3 = \frac{25}{3}x^3 - 5x^2 + x + (c_1 + c_2 + c_3) =$$
$$\frac{25}{3}x^3 - 5x^2 + x + c,\ \text{onde } c = c_1 + c_2 + c_3.$$

Uma outra tentativa:

o primeiro candidato que é comum o aluno buscar é $\frac{(5x-1)^3}{3}$. Basta você derivar essa função para obter

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(5x-1)^3}{3}\right] = 5(5x-1)^2.$$

Isso mostra que

$$\int 5(5x-1)^2\,dx = \frac{(5x-1)^3}{3} + k,$$

onde k é uma constante.

Se dividirmos ambos os membros da igualdade acima por 5, teremos que a integral indefinida é

$$\int (5x-1)^2\,dx = \frac{1}{15}(5x-1)^3 + \frac{k}{5}.$$

Agora, se o aluno desenvolver $\frac{1}{15}(5x-1)^3 + \frac{k}{5}$, obterá exatamente uma expressão do tipo $\frac{25}{3}x^3 - 5x^2 + x + c$ que é o resultado da integral obtida na primeira tentativa de resolução desse exemplo.

Agora, vamos resolver o mesmo exemplo, usando, porém, o método da substituição:

• EXEMPLO 2: Encontre

$$\int (5x-1)^2\,dx.$$

Solução: Perceba que se transformarmos essa integral em outra do tipo

$$\int u^2 du$$

então, facilmente encontraremos a resposta

$$\int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c.$$

Para transformar a integral, siga os passos

a) Faça $u(x) = 5x - 1$.

b) Derive u em relação a x,

$$\frac{du}{dx} = 5.$$

c) Se $\frac{du}{dx} = 5$ então $dx = \frac{1}{5}du.$

d) Agora substitua o integrando na variável x por um integrando na variável u, fazendo

$$\int (5x-1)^2\,dx = \int u^2 \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^2 du = \frac{1}{5}.\left(\frac{1}{3}u^3 + c\right) = \frac{1}{15}u^3 + \frac{c}{5} = \frac{1}{15}(5x-1)^3 + k,$$

onde $k = \frac{c}{5}$ é uma outra constante.

Se o aluno não estiver familiarizado com a aplicação do item c, lembramos que na seção sobre diferenciais foi visto que se $y = f(x)$ então $dy = f'(x)dx$. Logo para $u = u(x)$ temos $du = u'(x)dx = \frac{du}{dx}dx = 5dx$. Multiplicando a igualdade por $\frac{1}{5}$ chegamos a $dx = \frac{1}{5}du$.

Método da Substituição

Sejam $f = f(u)$ uma função contínua na variável u e $u = u(x)$ uma função diferenciável na variável x. Então

$$\int f(u)du = \int f(u(x))u'(x)dx.$$

• EXEMPLO 3: Encontre

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Solução: Está complicado? O passo principal para facilitar é descobrir quem você chamará de u. A dica é a seguinte: o bom candidato para chamar de u é aquele em que $u'(x)$ aparece como fator no integrando. Veja que a derivada

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

aparece como fator no integrando. Então:

a) Faça $u = \ln x$.

b) Veja que

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

e portanto $dx = xdu$.

c) Substitua estas igualdades na integral indefinida

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{u}{x} xdu = \int udu \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.$$

• EXEMPLO 4: Encontre

$$\int xe^{x^2+1} dx.$$

Solução: Está complicado de novo? Já descobriu quem você chamará de u? Seguindo a dica de chamar de u aquele em que $u'(x)$ aparece como fator no integrando, então $u = x^2 + 1$. Veja que a derivada

$$\frac{d}{dx}[x^2+1]=2x$$

não aparece como fator no integrando. Nesse caso, precisamos ajeitar o integrando da seguinte forma:

$$\int xe^{x^2+1}dx=\int\frac{1}{2}2xe^{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2+1}dx.$$

a) Faça $u = x^2 + 1$.

b) Veja que

$$\frac{du}{dx}=2x$$

e portanto $dx=\frac{1}{2x}du$.

c) Substitua essas igualdades na integral indefinida

$$\int xe^{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{u}\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+c=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+c.$$

Se você julgar mais fácil, também pode realizar esse processo de outra forma:

a) Faça $u = x^2 + 1$.

b) Veja que

$$\frac{du}{dx}=2x$$

e portanto $du = 2xdx$.

c) Substitua essas igualdades na integral indefinida

$$\int xe^{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2+1}2xdx=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+c.$$

O importante é que com a prática dos exercícios propostos você descubra a forma mais simples, na sua concepção, de resolvê-los.

EXERCÍCIOS

1) Encontre a integral indefinida:

a) $\int (7x + 5)^3\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{28}(7x+5)^4 + c.$

b) $\int (x + 5)^{-2}\, dx$ — Resposta: $-\frac{1}{x+5} + c.$

c) $\int \frac{1}{(7x+5)^2}\, dx$ — Resposta: $-\frac{1}{7(7x+5)} + c.$

d) $\int 14x(7x^2 + 5)^3\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{4}(7x^2+5)^4 + c.$

e) $\int x(5x^2 - 1)^2\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{30}(5x^2-1)^3 + c.$

f) $\int \frac{\ln 2x}{x}\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{2}(\ln 2x)^2 + c.$

g) $\int 3xe^{x^2-1}dx$ — Resposta: $\frac{3}{2}e^{x^2-1} + c.$

h) $\int x^2 e^{x^3+5}dx$ — Resposta: $\frac{1}{3}e^{x^3+5} + c.$

i) $\int \text{sen}(3x)\, dx$ — Resposta: $-\frac{1}{3}\cos(3x) + c.$

j) $\int \cos(3x)\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{3}\text{sen}(3x) + c.$

l) $\int \text{sen}(-3x)\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{3}\cos(3x) + c.$

m) $\int \sec^2(3x)\, dx$ — Resposta: $\frac{1}{3}\tan(3x) + c.$

OBS: $\sec^2 z = (\sec z)^2$.

n) $\int (2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 1)\, dx$ — Resposta: $\text{sen}(x^2 - 3x + 1) + c.$

o) $\int \frac{x^2}{x3+1}dx$ — Resposta: $\frac{1}{3}\ln(x^3+1) + c.$

p) $\int x\sqrt{x^2+1dx}$ — Resposta: $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c.$

q) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ — Resposta: $\sqrt{x^2+1} + c.$

4.3 INTEGRAL DEFINIDA

Estudaremos, nesta seção, como encontrar área delimitada por curvas, usando os conhecimentos de derivada e integral indefinida.

Vamos supor que o seu professor lhe tenha dado uma curva que é o gráfico de uma função diferenciável f definida em um intervalo $[a, b]$ e que lhe tenha pedido que encontrasse a área abaixo da curva no intervalo dado e acima do eixo x. Para não ter dúvidas, o seu professor fez os seguintes desenhos para você:

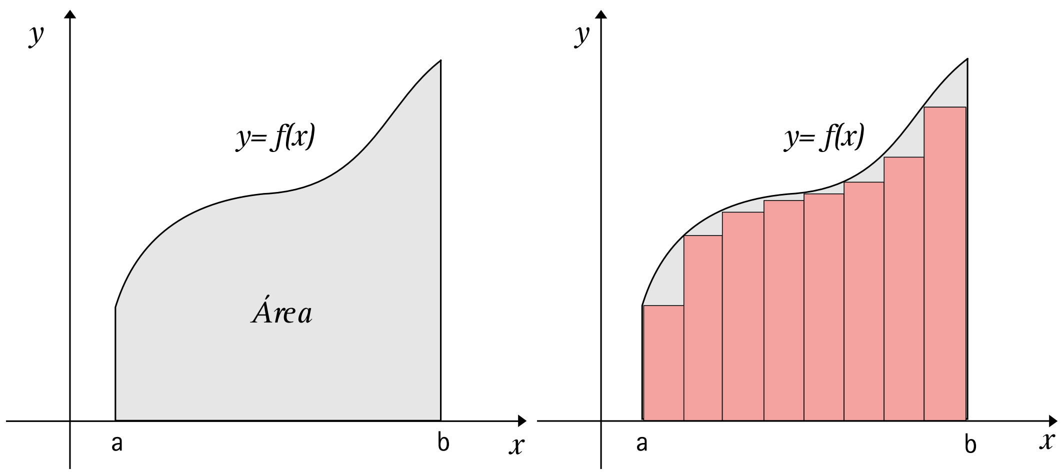


Figura 4.1

Talvez ainda não seja capaz de encontrar a área acima, mas você é capaz de encontrar um resultado aproximado para área acima somando as áreas dos retângulos da figura à direita. Veja que deverá apenas somar a área de 8 retângulos. Após entregar a sua resposta, o seu professor parabeniza você, mas também lhe diz que encontre um resultado ainda mais próximo da área procurada. Só lhe resta voltar para casa e depois dividir a figura em mais subintervalos, digamos n. O seu procedimento, seguindo a figura, provavelmente será o seguinte:

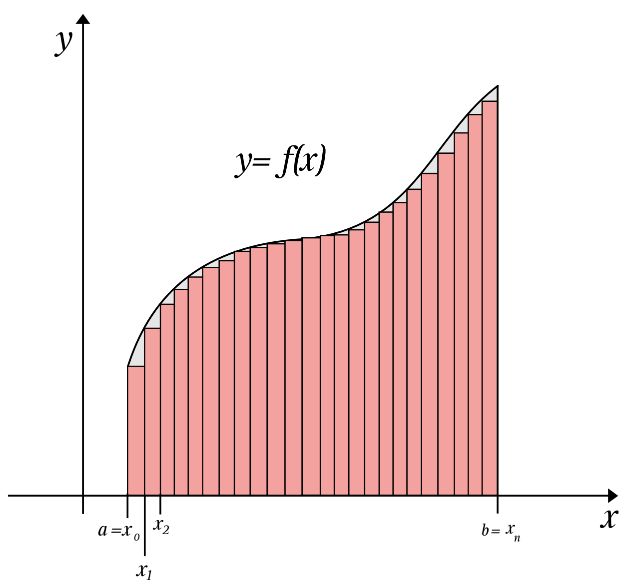


Figura 4.2

a) dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e cada ponto da divisão será denotada por x_i;

b) ver que a base dos retângulos tem tamanhos $\Delta x_0 = x_1 - x_0, \Delta x_1 = x_2 - x_1, \cdots,$ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$ não necessariamente todos iguais.

c) Ver que cada imagem $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_{n-1})$ é a altura de um retângulo;

d) Ver que a área de cada retângulo é o produto da base Δx_i pela altura $f(x_i)$ ou seja, a área do retângulo i é igual a $f(x_i)\,\Delta x_i$;

Logo a soma de todas as áreas desses retângulos será igual a

$$f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Conclusão: você pode afirmar que a área que se deseja encontrar é uma aproximação da área obtida como acima.

É claro que essa resposta agradará ao professor, mas ainda é uma aproximação para a área procurada. Quanto maior for o número n, mais próximo o somatório acima estará perto da área procurada. Na verdade a área procurada é o limite desse somatório, quando n tende para o infinito, ou seja, a área abaixo do gráfico da função f no intervalo $[a, b]$ é igual ao limite

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}].$$

O limite acima é chamado de integral definida de f de a até b e denotada por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

O que era somatório vira um S alongado com o extremo inferior do intervalo embaixo e o extremo superior do intervalo em cima. O limite do somatório dos termos $f(x_i)\,\Delta x_i$ se torna $\int_a^b f(x)dx$. Portanto

$$\begin{aligned} \acute{A}rea\ procurada &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}[f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}] \end{aligned}$$

Desta vez o seu professor lhe dará nota dez!

Um dos nossos objetivos nesta seção é justificar os passos para a conclusão do Teorema Fundamental do Cálculo. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral definida com a antiderivada.

Até se chegar à demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo percorremos um longo caminho: o estudo do Cálculo Diferencial. Além disso, podemos pensar que os conceitos a serem estudados até a constatação desse teorema representam o processo inverso da determinação da derivada de uma função.

Antes de enunciarmos e mostrarmos o Teorema Fundamental do Cálculo, faremos algumas considerações.

Como podemos ter uma visão geral do problema da área? Do que já vimos desta seção, temos que, dada uma função contínua não-negativa no intervalo $[a, b]$, é possível estimar a área entre o gráfico da função, no intervalo $[a, b]$, e o eixo x fazendo aproximações sucessivas da somas das áreas de retângulos.

Agora, vamos pensar em como resolver esse problema da área, através do conceito da antiderivada.

A idéia intuitiva é que, para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$, dever-se-ia primeiro considerar o problema mais geral, de achar a área sob a curva, denotada por $A(x)$ de a até x com $x \in [a, b]$ (veja a figura abaixo). Feito isso, foi possível descobrir que $A'(x)$ era fácil de encontrar. De fato, veremos adiante que $A'(x)$ é exatamente a função $f(x)$. Logo, se for possível encontrar $A(x)$ a partir de $A'(x) = f(x)$, então a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ poderia ser obtida fazendo $x = b$ em $A(x)$.

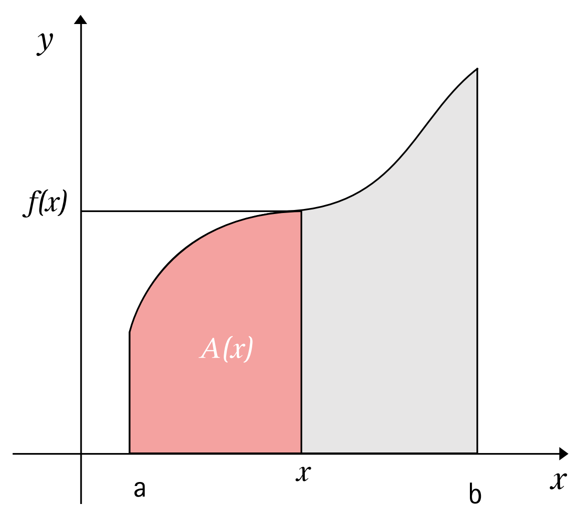


Figura 4.3

Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Seja $A(x)$ a área abaixo do gráfico de f de a até x. Então a função A é uma antiderivada de f, ou seja, $A'(x) = f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO: O Teorema Fundamental do Cálculo não exige que a função seja positiva. A única exigência é que f seja contínua em $[a, b]$. A fim de valorizar os fatos geométricos dessa demonstração, vamos supor $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ durante a demonstração abaixo.

a) Se x e $x + h$ são dois números do intervalo $[a, b]$ e $h > 0$ então

$$\int_a^{x+h} f(s)ds > \int_a^x f(s)ds.$$

Veja na figura abaixo que, para $h > 0$, a área abaixo de gráfico de f de a até $x + h$ é maior do que a área abaixo de gráfico de f de a até x.

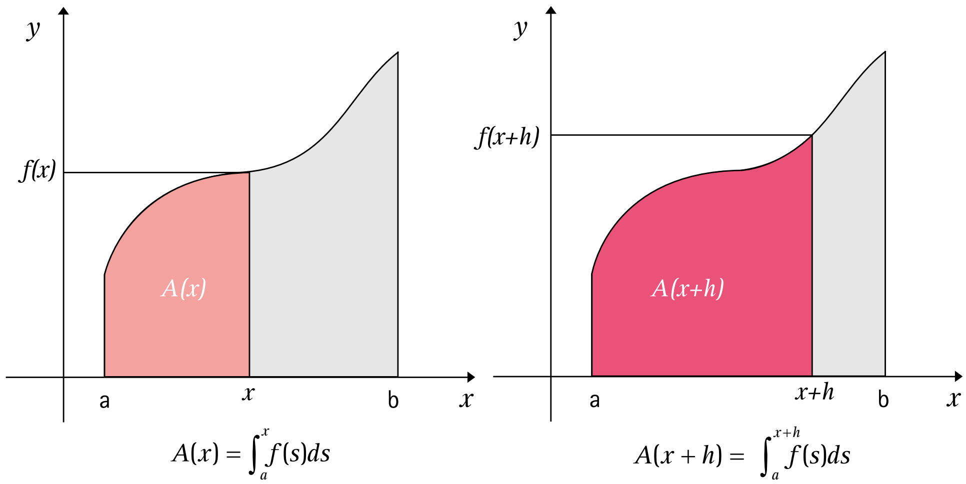


Figura 4.4

Se $h < 0$ então

$$\int_a^{x+h} f(s)ds < \int_a^x f(s)ds.$$

b) Se f for crescente, então

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(s)ds - \int_a^x f(s)ds > f(x)h$$

(confira esta desigualdade comparando os dois gráficos abaixo) e,

$$A(x+h) - A(x) < f(x+h)h.$$

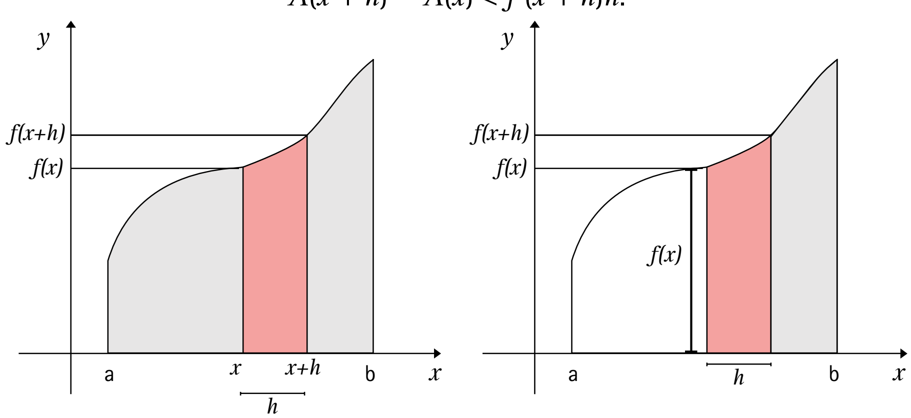


Figura 4.5

Logo, aplicando um limite conveniente nessas desigualdades podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} > \lim_{h\to 0}\frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} < \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)h}{h} = f(x).$$

Observe que o primeiro membro das duas desigualdades acima é exatamente a definição da derivada da função $A(x)$.

Portanto a função $A(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ e

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x).$$

Isso mostra que A é uma antiderivada de f. Fica como tarefa você mostrar agora o mesmo para f decrescente. É possível mostrar que a igualdade $A'(x) = f(x)$ independe de f ser crescente ou decrescente no intervalo $[a, b]$. Orientamos você a ver a demonstração desse teorema nos livros de cálculo.

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 2)

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a),$$

onde F é uma antiderivada de f.

DEMONSTRAÇÃO: Vimos na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1) que $A(x) = \int_a^x f(s)ds$ é uma antiderivada de $f(x)$. Se $F(x)$ for outra antiderivada então teremos $A'(x) = f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Logo, sendo $A'(x) = F'(x)$, temos que $(A(x) - F(x))' = A'(x) - F'(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$ ou seja, $A(x) - F(x) = c$ (constante).

Portanto,

$$F(x) + c = A(x).$$

Concluímos que

$$F(a) + c = A(a) = \int_a^a f(s)ds = 0$$

e

$$\int_a^b f(s)ds = A(b) = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

Vejamos algumas aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

• EXEMPLO 1: Calcule

$$\int_0^3 xdx.$$

Solução: Veja que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma antiderivada de $f(x) = x$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^3 xdx = F(3) - F(0) = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Observação:

Nesse exemplo, poderíamos ter considerado outra antiderivada de $f(x) = x$, por exemplo, $G(x) = \frac{x^2}{2} + c$, e, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_0^3 xdx = G(3) - G(0) = \frac{3^2}{2} + c - \frac{0^2}{2} - c = \frac{9}{2}.$$

O que podemos concluir?

Para a integral definida, é indispensável o uso da constante c.

• EXEMPLO 2: Calcule a área abaixo do gráfico de $f(x) = x$ no intervalo [0, 3]

Solução: A área abaixo do gráfico de $f(x) = x$ no intervalo [0, 3].

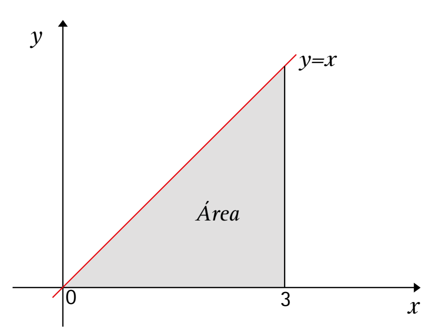


Figura 4.6

é dada pela integral $\int_0^3 x dx = \frac{9}{2}$. Verifique esse resultado a partir do que foi obtido no exemplo 1.

• EXEMPLO 3: Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} x \; dx.$$

Solução: Veja que $F(x) = -\cos x$ é uma antiderivada de $f(x) = \text{sen} x$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} x \; dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1.$$

Observação: Será usada com muita freqüência a expressão $F(b) - F(a)$ que é a função F avaliada em b menos a função F avaliada em a. Essa diferença tem uma notação especial, a saber

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Portanto, se f for uma função contínua no intervalo $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

onde F é uma antiderivada de f.

• EXEMPLO 4: Calcule

$$\int_0^1 e^x dx.$$

Solução: Veja que $F(x) = e^x$ é uma antiderivada de $f(x) = e^x$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - (1) = e - 1.$$

PROPRIEDADES: Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo $[a , b]$ e α um número real.

Então:

a) $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

É permitido passar um fator constante do integrando para fora da integral.

b) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

A integral da soma é igual a soma das integrais.

c) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ao trocar os extremos a e b da integral, o resultado da integral muda de sinal.

Demonstração:

a) Seja F uma antiderivada de f. Então

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = (\alpha F(x))\Big|_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha[F(b) - F(a)] = aF(x)\Big|_a^b = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

b) Seja F uma antiderivada de f e G uma antiderivada de g. Então

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]dx &= (F(x)+G(x))\Big|_a^b = F(b)+G(b)-(F(a)+G(a))\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

c) Seja F uma antiderivada de f. Então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

- EXEMPLO 5: Calcule a área abaixo do gráfico de $f(x) = -5(x^2 - 4)$ no intervalo $[-2, 2]$.

Solução: Para não haver equívocos, o aluno deve procurar fazer primeiro o gráfico da função f.

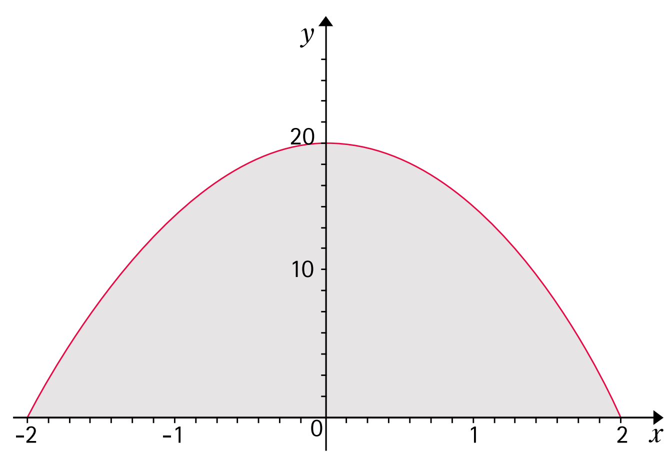


Figura 4.7

A área é igual a

$$\int_{-2}^{2} -5(x^2-4)dx = -5\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx = -5\int_{-2}^{2} x^2 dx - 5\int_{-2}^{2} -4dx$$

$$= -5\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} + 20\int_{-2}^{2} 1dx = -5\left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) + 20\,(x)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{80}{3} + 20(2-(-2)) = \frac{160}{3}.$$

Observações:

1) Se a função f for positiva no intervalo $[a, b]$, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ será a área abaixo do gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

2) Se f for negativa no intervalo $[a, b]$, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ será negativa e $-\int_a^b f(x)dx$ será a área entre o gráfico de f e o eixo-x no intervalo $[a, b]$

• EXEMPLO 6: Encontre a área delimitada entre o eixo-x e o gráfico de $f(x) = x(x^2 - 1)$.

Solução: O gráfico de f

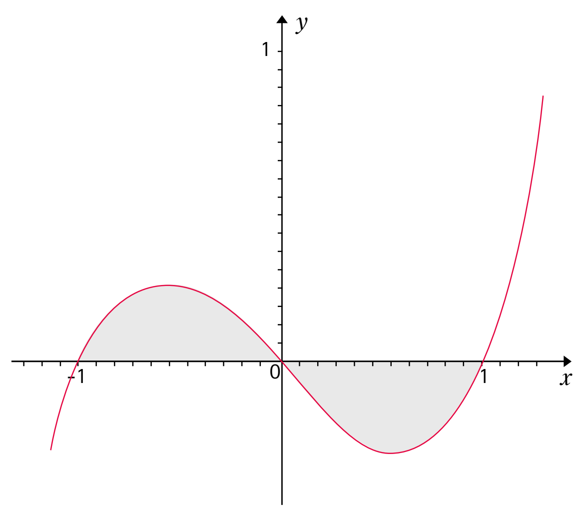


Figura 4.8

mostra que devemos somar as áreas $\int_{-1}^{0} x(x^2-1)dx = \frac{1}{4}$ e $-\int_{0}^{1} x(x^2-1)dx = \frac{1}{4}$. Portanto a área é igual a $\frac{1}{2}$. O aluno deve verificar ainda que $\int_{-1}^{1} x(x^2-1)dx = 0$.

Atenção:

Esse resultado igual a zero significa que, geometricamente, o cálculo da integral $\int_{-1}^{0} x(x^2-1)dx$ fornece a área entre a curva $y = f(x)$, no intervalo $[a, b]$, e o eixo x.

EXERCÍCIOS

1) Calcule as integrais:

a) $\int_2^5 dx = \int_2^5 1dx$ — Resposta: 3.

b) $\int_0^1 x(x-1)dx$ — Resposta: $-\frac{1}{6}$.

c) $\int_0^1 (x^2-1)dx$ — Resposta: $-\frac{2}{3}$.

d) $\int_{-1}^1 (x^2-1)dx$ — Resposta: $-\frac{4}{3}$.

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \; dx$ — Resposta: 0.

f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx$ — Resposta: 2.

g) $\int_0^1 (5x^3 - x^2 + 3x - 4)dx$ — Resposta: $-\frac{19}{12}$.

h) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ — Resposta: $2(\sqrt{2}-1)$.

i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ — Resposta: $2(\sqrt{2}-1)$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x \; dx$ — Resposta: 3.

k) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \; dx$ — Resposta: $\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})$.

2) Calcule a área delimitada pelo gráfico de f e o eixo-x no intervalo solicitado. Sugerimos que o aluno faça o gráfico de f para ter a clareza da área procurada.

a) $f(x) = x$, em $[0, 3]$. — Resposta: 9/2.

b) $f(x) = x$, em $[-3, 3]$. — Resposta: 9.

c) $f(x) = x(x - 1)$, em $[0, 1]$. — Resposta: 1/6.

d) $f(x) = x^2 - 1$, em $[0, 1]$. — Resposta: 2/3.

e) $f(x) = x^2 - 1$, em $[-1, 1]$. — Resposta: 4/3.

f) $f(x) = \operatorname{sen} x$, em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. — Resposta: 2.

4.4 ÁREA ENTRE GRÁFICOS

Na seção anterior, vimos que a área S da região R delimitada pelo gráfico de uma função f, não-negativa, e o eixo-x no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

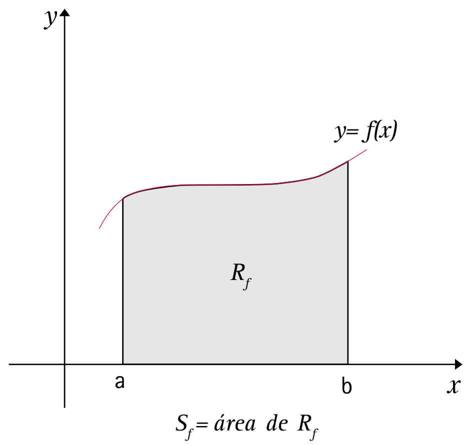


Figura 4.9

A área entre gráficos de funções não negativas f e g é igual à diferença entre as áreas delimitadas pelas funções e o eixo-x, conforme apresentado na figura abaixo:

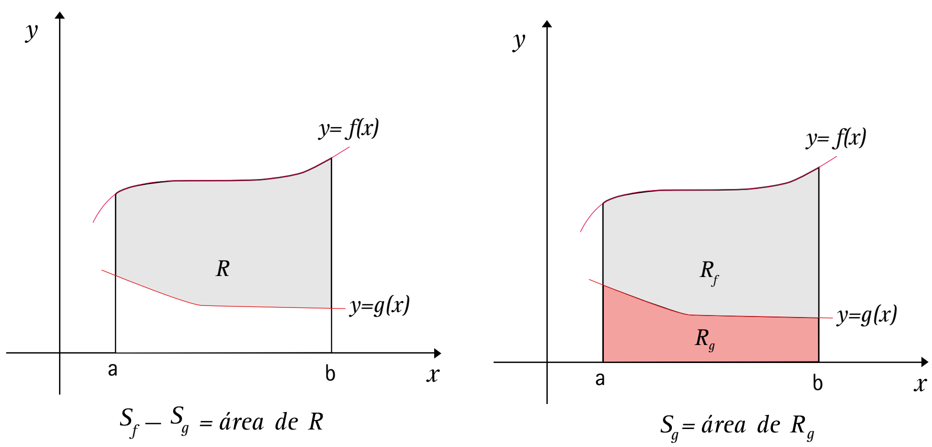


Figura 4.10

A área da região R é igual a área da região R_f menos a área da região R_g ou seja,

$$\acute{A}rea\ da\ regi\tilde{a}o\ R = S_f - S_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = [\int_a^b f(x) - g(x)]dx.$$

Mais do que isso, se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então a integral

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

é igual à área da região delimitada pelos gráficos de f e g no intervalo $[a, b]$.

• EXEMPLO 1: Calcule a área entre os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$ no intervalo [0, 1].

Solução: Primeiro observe os gráficos das funções f e g abaixo:

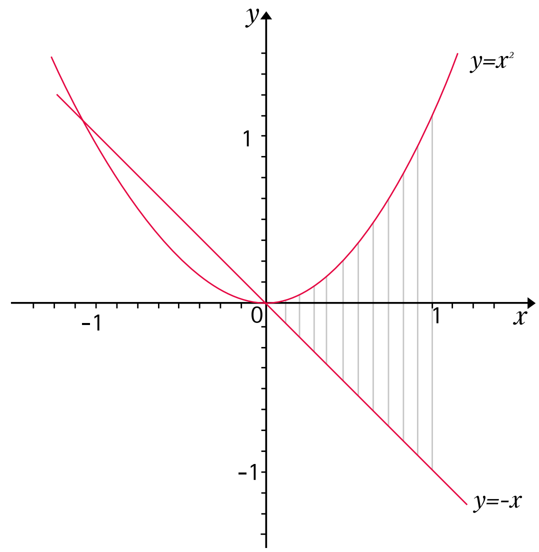


Figura 4.11

A área procurada é igual a

$$\int_0^1 [x^2 - (-x)]dx = \int_0^1 [x^2 + x]dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - (0+0) = \frac{5}{6}.$$

Agora vamos propor um exemplo, com poucas mudanças no enunciado, no qual a região entre os gráficos muda significativamente.

• EXEMPLO 2: Calcule a área da região delimitada pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$.

Solução: Neste exemplo devemos calcular a área da região pintada abaixo:

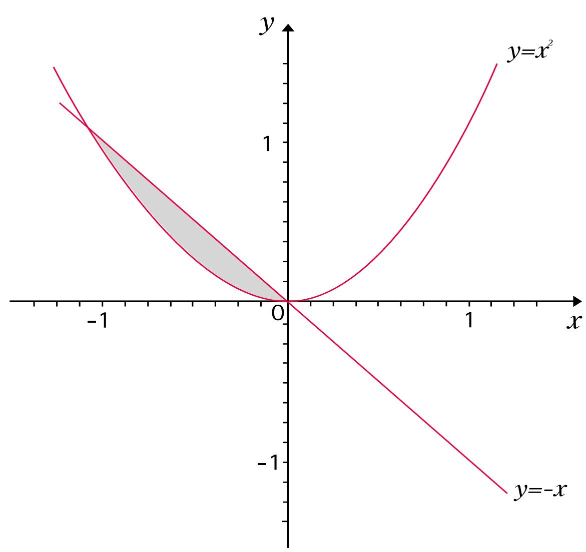


Figura 4.12

Nesse exemplo surgem as seguintes perguntas:

a) Em qual intervalo?

b) O integrando é $f(x) - g(x)$ ou $g(x) - f(x)$?

Respondendo para:

a) O intervalo será determinado pelos pontos de interseção entre os gráficos de f e g. A interseção entre os gráficos ocorre no ponto z em que $f(z) = g(z)$ ou seja, $z^2 = -z$. Resolvendo a equação $z^2 + z = z(z + 1) = 0$ encontramos $z = 0$ e $z = -1$. Isto significa que os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$ se intersectam nos pontos (0, 0) e (–1, 1). Assim, devemos integrar de –1 até 0.

b) A diferença correta é a maior menos a menor. Como $-x \geq x^2$ para todo $x \in [-1, 0]$, então o integrando será a diferença $g(x) - f(x)$.

Portanto a área da região é igual a

$$\int_{-1}^{0} [-x - x^2]dx = \int_{-1}^{0} [x^2 + x]dx = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\left[(0+0) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{6}.$$

Substituição em integrais definidas

Já usamos o método da substituição para calcular algumas integrais indefinidas. Agora faremos o mesmo para integrais definidas.

Supondo que as funções f e u sejam contínuas em seu domínio, então temos

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

• EXEMPLO 3: Calcule a integral

$$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx.$$

Solução: Seguindo o método de mudança de variável, faça $u = x^2 + 1$ e veja que $du = 2xdx$ que implica em

$$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} e^u du = \frac{1}{2}\int_1^2 e^u du = \frac{1}{2}(e^u)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^2 - e) = \frac{e}{2}(e-1).$$

Para calcular essa integral, você também pode usar o método da substituição primeiro (variável u) e, depois, voltar à variável original (variável x) e aplicar os limites de integração propostos inicialmente no problema. Assim:

$$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} e^u du$$

Agora calculando a integral indefinida:

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + c.$$

Utilizando os limites de integração originais:

$$\frac{1}{2}(e^{x^2+1})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e) + c - c = \frac{e}{2}(e-1).$$

Mais propriedades da integral definida

As propriedades abaixo serão freqüentemente utilizadas no decorrer dos estudos de cálculo diferencial e integral.

Sejam f e g duas funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ Valem as seguintes propriedades:

a) se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

c) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \geq \int_a^b |f(x)|dx$ ·

Demonstração:

a) A integral definida é, por definição, um somatório de produtos de imagens de f por medidas de subintervalos de $[a, b]$. Como a função f tem imagens não-negativas em $[a, b]$ então a integral definida é não negativa.

b) A demonstração de b) é decorrente de a). Veja que se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e por a),

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0.$$

Portanto

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0.$$

c) A demonstração de c) decorre de b). A definição de módulo de um número diz que $|c| = c$ se $c \geq 0$ e $|c| = -c$ se $c < 0$. Logo é verdadeiro que $|f(x)| \geq f(x)$ e $|f(x)| \geq -f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Por b) temos

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

e

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq -\int_a^b f(x)dx.$$

Por definição de módulo, $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| = \int_a^b f(x)dx$ ou $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$. Em qualquer um dos casos, temos

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Comentário: Se você estiver com dificuldade de aceitar c), veja o seguinte exemplo:

- EXEMPLO 4: Compare os números $\left|\int_{-1}^1 x^3 dx\right|$ e $\int_{-1}^1 \left|x^3\right| dx$.

Solução: Para todo $x \in [-1,\ 0]$, $|x^3| = -x^3$ e para todo $x \in [1,\ 0]$, $|x^3| = x^3$. Logo

$$\int_{-1}^1 \left|x^3\right| dx = \int_{-1}^0 \left|x^3\right| dx + \int_0^1 \left|x^3\right| dx = \int_{-1}^0 -x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e

$$\left|\int_{-1}^1 x^3 dx\right| = \left|\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1}\right| = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = 0.$$

EXERCÍCIOS

1) Calcule a área entre o gráfico de f e g no intervalo dado: Como há necessidade de saber qual das funções é maior no intervalo dado, sugerimos que o aluno faça o gráfico das funções antes de tentar calcular a área.

a) $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 2$ no intervalo [0, 1].

Resposta: 13/6

b) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Resposta: $\sqrt{2} - 1$

c) $f(x) = 1$ e $g(x) = -x^2 + 5$ no intervalo [−2, 2].

Resposta: 16.

2) Calcule a área do gráfico delimitado pelas funções f e g:

a) $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 2$.

Resposta: 9/2.

b) $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$.

Resposta: 1/2

c) $f(x) = 1$ e $g(x) = -x^2 + 5$.

Resposta: 16.

3) Use o método da substituição para calcular as integrais:

a) $\int_0^1 (x+5)^{-2}\,dx$.

Resposta: $-\frac{1}{6}$.

b) $\int_0^1 x(5x^2 - 1)^2\,dx$

Resposta: $\frac{32}{30}$.

c) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \frac{\ln[3x]}{x}\,dx$

Resposta: $\frac{3}{2}$.

EXERCÍCIOS

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)dx$

Resposta: $\frac{1}{4}$.

e) $\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$

Resposta: $\frac{7}{3}$.

f) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Resposta: 0.

4) Supondo que f seja contínua em $[a, b]$, diga se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa:

a) Se $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = 0$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Resposta: F

b) Se $\int_a^b f(x)dx = 0$ então $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$.

Resposta: F

c) Se $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b |f(x)|\,dx > 0$.

Resposta: V

d) Se $f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b |f(x)|\,dx < 0$.

Resposta: V

e) Se t e y são dois números do intervalo $[a, b]$ tais que $t > y$ então $\int_a^t f(x)dx > \int_a^y f(x)dx$.

Resposta: F

f) Se t e y são dois números do intervalo $[a, b]$ tais que $t > y$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^t f(x)dx > \int_a^y f(x)dx$.

Resposta: V

4.5 INTEGRAL DE FUNÇÃO NA VARIÁVEL

Alguns problemas se tornam mais simples, quando invertemos a variável de estudo. Por exemplo, digamos que se queira calcular a área compreendida entre o gráfico de uma função que dependa da variável y, ou seja, $x = g(y)$, conforme figura abaixo:

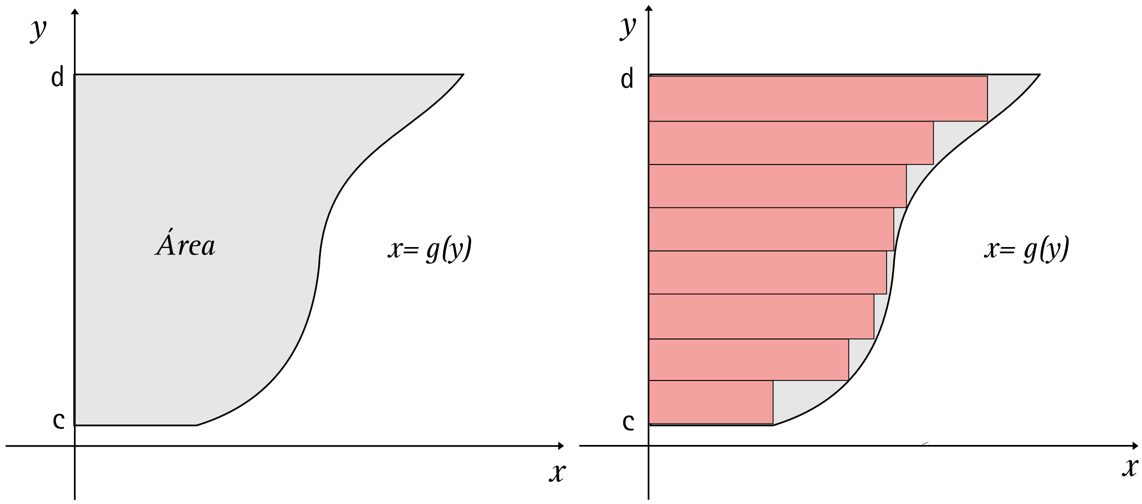


Figura 4.13

Para isso, procederemos analogamente à definição de integral definida em relação a x.

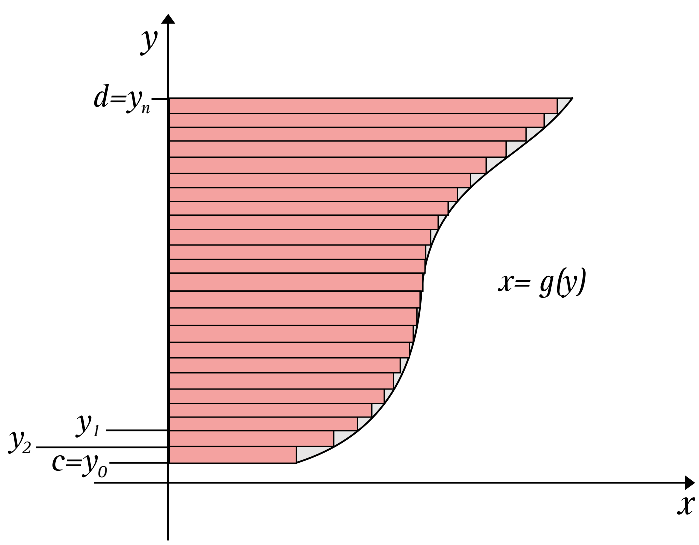


Figura 4.14

Observando a figura acima, siga os seguintes passos:

a) dividir o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos e cada ponto de divisão será denotado por y_i;

b) ver que a base dos retângulos tem tamanhos

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \cdots, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1};$$

c) Ver que cada imagem $g(y_0), g(y_1), \cdots, g(y_{n-1})$ é a altura de um retângulo;

d) Ver que a área de cada retângulo é o produto da base Δy_i pela altura $g(y_i)$ ou seja, $g(y_i)\Delta y_i$;

Logo a soma de todas as áreas desses retângulos será igual a

$$g(y_0)\Delta y_0 + g(y_1)\Delta y_1 + \cdots + g(y_{n-1})\Delta y_{n-1}.$$

Quanto maior for o número n, mais próximo o somatório acima estará perto da área procurada. Na verdade a área procurada é o limite desse somatório, quando n tende para o infinito, ou seja, a área entre o gráfico da função $x = g(y)$ no intervalo $[c, d]$ é igual ao limite

$$\lim_{n\to\infty}[g(y_0)\Delta y_0 + g(y_1)\Delta y_1 + \cdots + g(y_{n-1})\Delta y_{n-1}].$$

O limite acima é chamado de integral definida de g de c até d e denotado por

$$\int_c^d g(y)dy.$$

Portanto

$$\begin{aligned} Área\ procurada &= \int_c^d g(y)dy \\ &= \lim_{n\to\infty}[g(y_0)\Delta y_0 + g(y_1)\Delta y_1 + \cdots + g(y_{n-1})\Delta y_{n-1}]. \end{aligned}$$

• EXEMPLO 1: Calcule a área entre o gráfico de $x = y^2$ e o eixo-y, no intervalo $[-1, 1]$.

Solução: O gráfico de $x = y^2$ é uma parábola simétrica em relação ao eixo-x.

A área é igual a

$$\int_c^d g(y)dy = \int_{-1}^1 y^2 dy = \left.\left(\frac{y^3}{3}\right)\right|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

• EXEMPLO 2: Encontre a área entre os gráficos das funções $x = g(y) = y^3$ e $x = f(y) = y$.

Os gráficos das duas funções são:

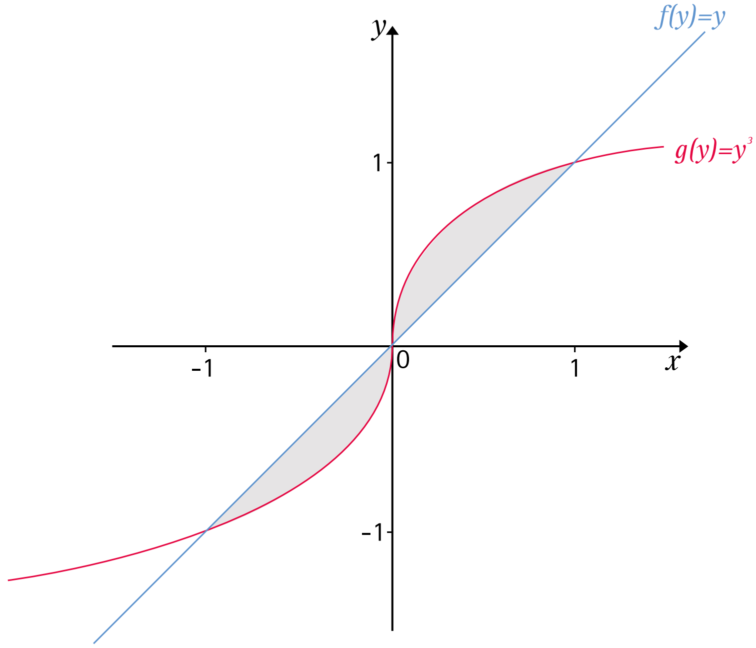


Figura 4.15

Solução: A interseção entre os gráficos será dada pelos pontos y tais que $y^3 = y$, ou seja, $y = 0$, $y = -1$ e $y = 1$. Para determinar qual das funções f ou g é maior no intervalo [0, 1], faça o seguinte:

a) risque uma seta horizontal da esquerda para a direita.

b) a função cujo gráfico for tocado primeiro é a menor.

Concluímos que $f(y) \leq g(y)$ para todo $y \in [-1, 0]$ e que $g(y) \leq f(y)$ para todo $y \in [0, 1]$. Observe que a região delimitada pelos gráficos dessas duas funções é composta de duas regiões de mesma área, ou seja,

$$\int_{-1}^{0} (y^3 - y)\ dy = \int_{0}^{1} (y - y^3)dy.$$

Isso significa que área entre os dois gráficos é igual a

$$2\int_{0}^{1} (y - y^3)\ dy = 2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - (0 - 0)\right) = \frac{1}{2}.$$

EXERCÍCIOS

1) Calcule a área entre o gráfico de f e g no intervalo dado: como há necessidade de saber qual das funções é maior no intervalo dado, sugerimos que o aluno faça o gráfico das funções antes de tentar calcular a área.

a) $x = f(y) = 1$ e $x = g(y) = 2y$ no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Resposta: 25/4.

b) $f(y) = 1$ e $g(y) = -y^2 + 5$ no intervalo $[-2, 2]$.

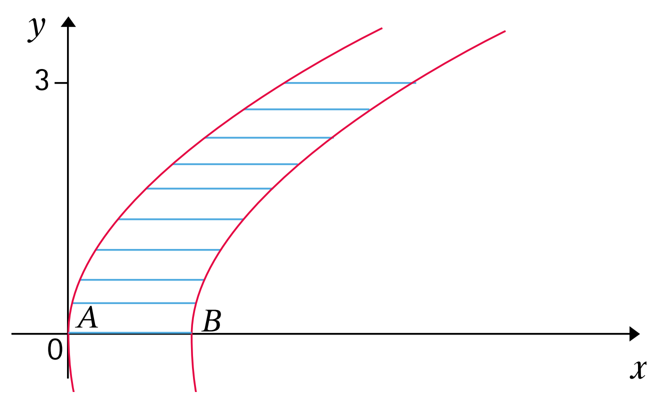
Resposta: 16.

2) Calcule a área do gráfico delimitado pelas funções e :

a) $x = y^3$ e $x = y^3$

Resposta: 1/12.

3) Tome um segmento AB sobre o eixo-x de comprimento $2cm$. Digamos $A = (0,0)$ e $B = (2, 0)$. Arraste o segmento mantendo-o na horizontal e mantendo a extremidade do ponto A sobre a curva $x = y^2$ no intervalo $[0, 3]$ em y. Calcule a área da figura gerada pelo arrastamento do segmento sobre a curva.



APÊNDICE A

UMA BREVE ABORDAGEM SOBRE TRIGONOMETRIA

1) O QUE É TRIGONOMETRIA?

Para os primeiros matemáticos, a Trigonometria era uma ciência de cálculo baseada essencialmente em teoremas geométricos, razão pela qual pode ser considerada como a unificadora da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, e isso contribuiu para certo atraso a respeito de seu desenvolvimento independente.

Nada de concreto podemos afirmar sobre a verdadeira origem da Trigonometria, somente ressaltar que é obscura e perde-se na pré-história. As primeiras caracterizações do desenvolvimento da Trigonometria podem ser relacionadas pelas medições de sombras no decorrer das horas do dia e das estações do ano, como também outros problemas análogos a esses que demonstram indícios superficiais da utilização de ferramentas trigonométricas.

A evolução da história da Trigonometria apresenta-se de tal modo que a levou ter todos os seus teoremas como corolários da teoria das funções complexas, convertendo assim suas idéias primitivas em dados significativos da Matemática avançada.

A Trigonometria, que pode ser entendida inicialmente como a área de estudos das medidas dos triângulos, pode ter seu desenvolvimento, ao longo da história da Matemática destacada em cinco etapas:

- 1ª - indica os primeiros sinais que representam algum desenvolvimento desta área: as tentativas de medições de sombras, de alturas e as teorias sobre semelhança de triângulos.

- 2ª – é caracterizada pela forte vinculação com a Astronomia: séc. II aC ao séc. XII.

- 3ª – tem tratamento independente da Astronomia: séc. XIII.

- 4ª - a Trigonometria interage com a Geometria, a Análise Numérica e a Álgebra: séc. XIII ao séc. XVI. (O termo Trigonometria foi usado pela primeira vez - pelo alemão Bartholomaüs Pitiscus (1561-1613) - como título de uma exposição publicada em 1595)

- 5ª – é caracterizada a partir do século XVII: além da invenção do Cálculo, esse período apontou um caminho novo tanto para a Matemática quanto para a Trigonometria.

2) TRIÂNGULO

Para estudar os triângulos, é necessário sabermos a noção de ângulo.

Um ângulo é uma figura formada por duas semi-retas de mesma origem. Tais semi-retas são ditas lados do ângulo, e a origem é o vértice do ângulo.

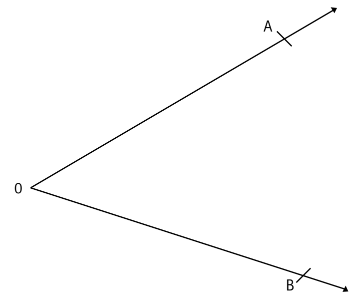


Figura 1

Nós denotamos o ângulo acima por AÔB ou BÔA ou apenas Ô. É comum também designarmos um ângulo por uma letra grega minúscula como $\alpha, \beta, \delta, \theta$ etc.

Como um ângulo é medido?

Para medir um ângulo utilizamos um instrumento chamado transferidor, que é um círculo graduado numa unidade qualquer.

As unidades de medidas mais comuns para ângulos são graus e radianos.

A figura abaixo exibe um transferidor graduado em graus. A medida 1 grau, denotada por 1°, representa a fração de 1/360 do círculo. Historicamente entendemos e convencionamos que o círculo inteiro contém 360°.

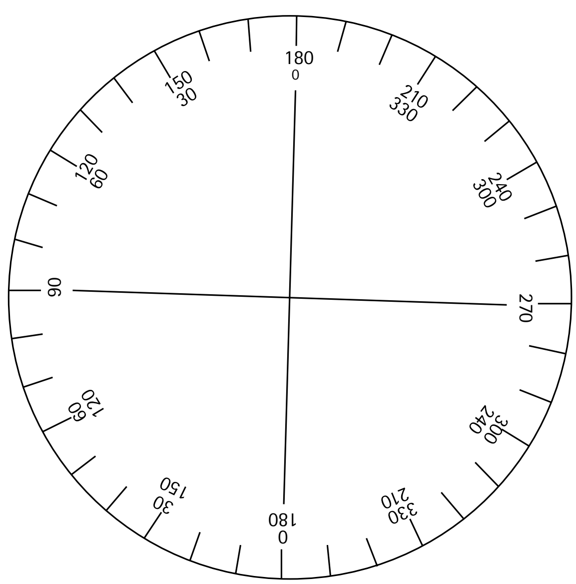


Figura 2

Algumas classificações quanto às medidas dos ângulos:

- Um ângulo formado por duas semi-retas opostas é dito ângulo raso. Ou seja, a medida de um ângulo raso é de 180°.
- Um ângulo reto é um ângulo que mede 90° (a metade de um ângulo raso).
- Um ângulo agudo é um ângulo cuja medida é menor do que 90°.
- Um ângulo obtuso é um ângulo cuja medida é maior do que 90°.
- Um ângulo nulo é aquele formado por duas semi-retas coincidentes, e sua medida será zero, independente da unidade de medida adotada.

Considere três pontos A, B e C não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma reta). Esses pontos determinam três segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{AC}$. O triângulo ABC é a figura plana formada pela reunião desses segmentos de reta.

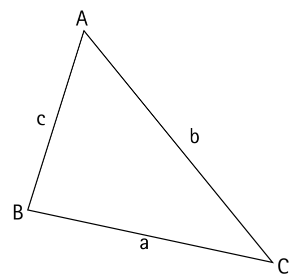


Figura 3

A figura acima exibe um triângulo ABC com as seguintes "nomenclaturas":

- Vértices: A, B, C
- Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{AC}$
- Medidas dos lados (cada um indica um número real positivo): $\overline{AB} = c; \overline{BC} = a; \overline{AC} = b$
- Ângulos internos: $B\hat{A}C; A\hat{B}C; A\hat{C}B$

Os triângulos também possuem algumas classificações. Vejamos:

1ª) Quanto aos ângulos:

- Retângulo: se tem um ângulo reto.
- Acutângulo: se tem os três ângulos agudos.
- Obtusângulo: se tem um ângulo obtuso.

É importante também lembrar que da Geometria Plana é possível provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

2ª) Quanto às medidas dos lados:

- Equilátero: quando tem os três lados congruentes (lados congruentes significam lados que têm a mesma medida).

- Isósceles: quando tem dois lados congruentes.

- Escaleno: quando não possui dois lados congruentes.

Vamos agora tratar do triângulo retângulo:

Dado um triângulo retângulo de catetos x e y e hipotenuza z a razão $\frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{z}$ é chamada de seno do ângulo α e denotada por $\operatorname{sen}\alpha$, a razão $\frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{z}$ é chamada de cosseno do ângulo α e denotada por $\cos\alpha$ e a razão $\frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{y}{x}$ é chamada de tangente do ângulo α e denotada por $\tan\alpha$.

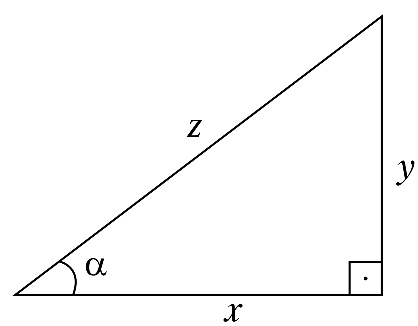


Figura 4

Veremos adiante alguns limites trigonométricos. Todos os cálculos utilizam as medidas em radianos. Se você não lembra o que é um radiano, veja o seguinte: *Um radiano* é o arco de comprimento igual ao raio da circunferência. Tente desenhar um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. Sejam r o raio da circunferência e C o comprimento da circunferência. Sabendo que a razão $C = 2\pi r$, pergunta-se: quantos radianos tem a circunferência? A resposta é simples. A igualdade $C = 2\pi r$ afirma que a circunferência tem 2π arcos de medida r. Portanto, a circunferência tem 2π radianos. Os babilônios dividiram a circunferência em 360 partes iguais e chamaram uma dessas 360 partes de *um grau*. Portanto um arco de 2π radianos corresponde a um ângulo de 360 graus. Um arco de π radianos corresponde a um ângulo de 180 graus.

A partir das definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo, mostra-se que, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

A tabela abaixo, conhecida do Ensino Médio, mostra os ângulos em graus, com os arcos correspondentes em radianos, seno, cosseno e tangente.

Ângulo em graus	Arcos em radianos	Seno do ângulo	Cosseno do ângulo	Tangente do ângulo
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Um triângulo retângulo possui um ângulo de 90º e os outros dois menores que 90º, ou seja, se α é um arco que corresponde a um ângulo de um triângulo retângulo então $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Necessitamos estender as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente para um intervalo maior. Para isso usamos o conhecido como *círculo trigonométrico*. Considere um círculo de raio 1. Seja P um ponto de coordenadas (x, y) sobre a circunferência e α a medida do ângulo formado pelo eixo-x e pelo segmento OP. Então

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x, \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

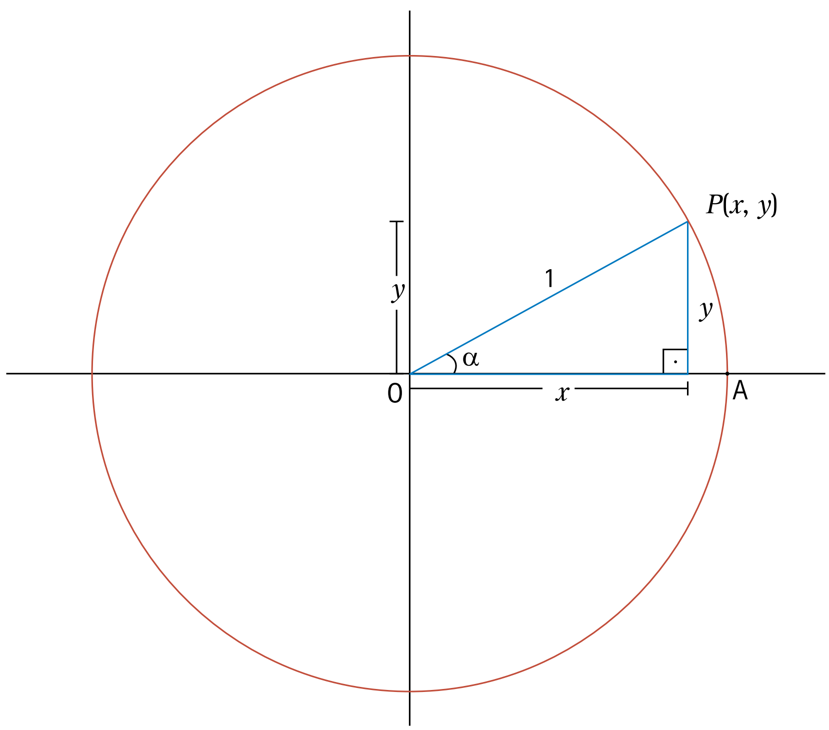


Figura 5

Observe que se $\alpha = 0$, então $\text{sen}\,\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ e $\tan\alpha = 0$. Uma tabela a mais para você.

Ângulo em graus	Arcos em radianos	Seno do ângulo	Cosseno do ângulo	Tangente do ângulo
0	0	0	1	0
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	indefinida
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Veja no círculo abaixo o arco de $\frac{3\pi}{4}$ e que $\text{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$.

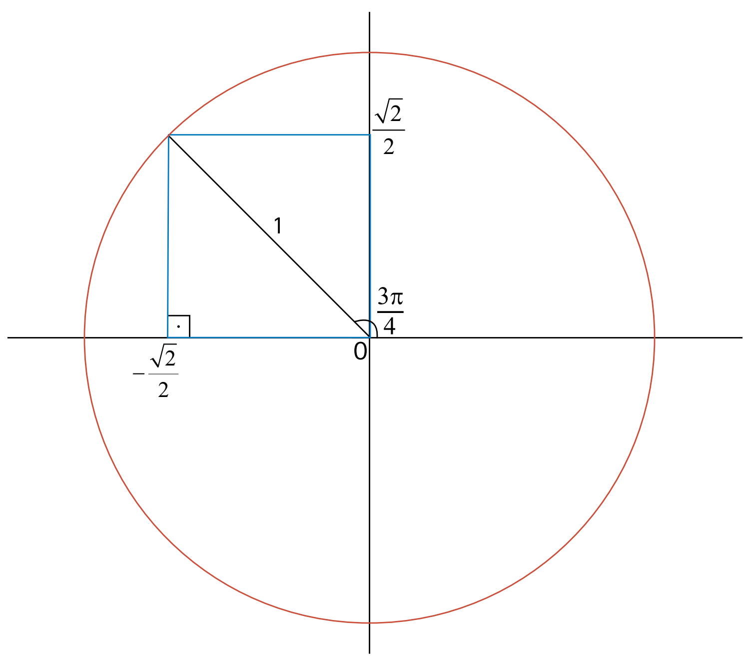


Figura 6

Sempre que escrevermos $\operatorname{sen} x$ significará que x é uma medida em radianos, exceto quando avisado explicitamente. Os gráficos das funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$ estão desenhados abaixo:

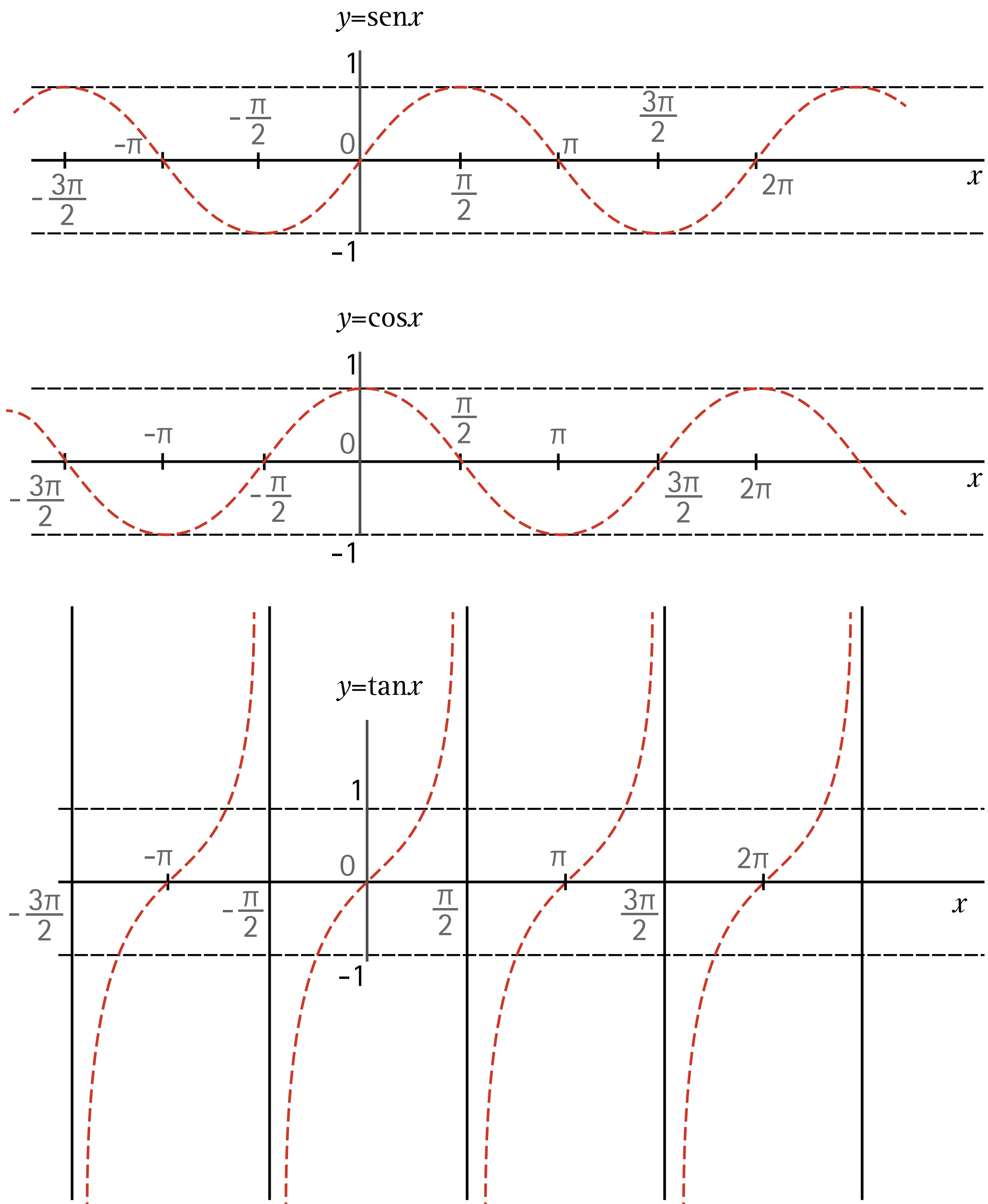


Figura 7

Para saber mais sobre Trigonometria, pesquise o tema nos livros de Matemática do Ensino Médio.

Procure fazer alguns exercícios também. Isso o ajudará a familiarizar-se ainda mais com a Trigonometria.

BIBLIOGRAFIA

1. CONDE, Antônio. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Atlas, 2003.

2. GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de Cálculo*. 5.ed. Rio de Janeiro, LTC, 2001.

3. THOMAS, George B. *Cálculo*. V.1. 10. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2002.

4. LANG, Serge. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

5. ÁVILA, Geraldo. *Cálculo das funções de uma variável*. V.1. 7. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

6. ÁVILA, Geraldo. *Introdução ao Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

7. SALAS, Saturnino L.; HILLE, Einar; ETGEN, Garret J. *Cálculo*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

8. SALAS, Saturnino L.; HILLE, Einar; ETGEN, Garret J. *Cálculo*. 9. ed. Rio deJaneiro: LTC, 2005.

9. HOWARD, Eves. *Introdução à história da Matemática.* Campinas/SP: Editora da UNICAMP, 2004.

10. BIRAL, Andressa Cesana. *Trigonometria: uma abordagem histórica*. São Mateus/ES. Mini-curso: I Semana de Matemática de São Mateus/ES. 17 a 20 de agosto de 2004.

11. SARTIM, Ademir. *Notas de Aula de Matemática Básica I: Trigonometria*. Volume 2. Vitória/ES: UFES, 2004.

Aldo Vignatti

Doutor em Ciências pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, com ênfase em termodinâmica do contínuo, Mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo e Professor Adjunto do Departamento de Ciências Matemáticas e Naturais do Centro Universitário Norte Espírito Santo/CEUNES/UFES.

Andressa Cesana

Mestre em Matemática Aplicada pela Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro - Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo. Professora Assistente do Departamento de Engenharia e Ciências Agrárias (DECE) do Centro Universitário Norte do Espírito Santo/CEUNES/UFES e formadora do Pró-Letramento em Matemática CEFOCO/UFES/MEC.

Publicações: co-autora do Fascículo 6, Tratamento da Informação, do Pró-Letramento em Matemática (MEC/SEB).

ISBN 978-85-99510-52-0

www.neaad.ufes.br
(27) 4009 2208

UFES SEAD UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL CAPES