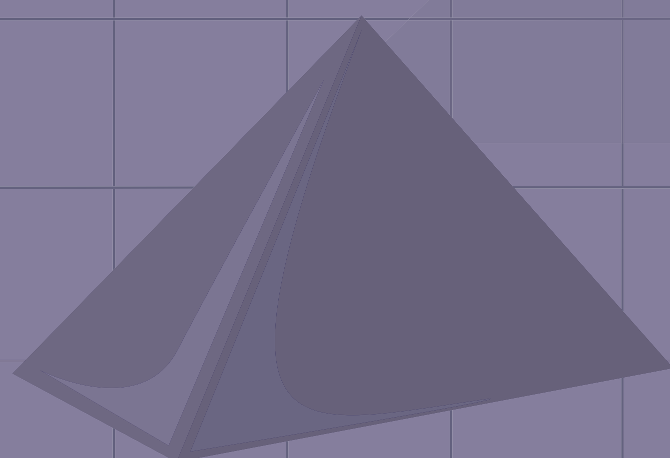
Andressa Cesana e Joccitiel Dias da Silva

Geometria Analítica



ne@ad

Universidade Aberta do Brasil
Universidade Federal do Espírito Santo

Física
Licenciatura

A Geometria Analítica é importante no seu curso porque ela aparece como ferramenta em outras disciplinas como o Cálculo Diferencial e a Física. Este texto faz uma retomada de alguns assuntos que já estudou, mas apresenta conteúdos novos mais específicos.

Notas históricas foram introduzidas por acreditarmos que a história da Matemática deve ser parte inerente do estudo de qualquer conteúdo matemático, procuraremos, sempre que possível, apresentá-las juntamente com o conteúdo a ser apreendido.
Serão propostas também atividades/problemas que você deverá sempre tentar resolvêlas.

Pode-se dizer que a resolução de problemas é uma área de estudos atualmente da Matemática que se preocupa em demonstrar a importância fundamental de como os problemas práticos do cotidiano, que sejam significativos para o aluno, são imprescindíveis para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Dessa forma, esperamos que você sinta-se motivado a resolver problemas!

Estaremos nos baseando em livros-textos já existentes, de modo que você não deve se limitar apenas ao que propomos aqui. Esses textos estarão todos citados não só no decorrer deste livro como também nas nossas referências.

Geometria Analítica

Edição Revisada

Joccitiel Dias da Silva

Vitória
2009

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Universidade Aberta do Brasil
Celso Costa

Universidade Federal do Espírito Santo

Reitor
Rubens Sergio Rasseli

Vice-Reitor e Diretor Presidente do Ne@ad
Reinaldo Centoducatte

Pró-Reitora de Graduação
Isabel Cristina Novaes

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação
Francisco Guilherme Emmerich

Pró-Reitor de Extensão
Aparecido José Cirillo

Diretora Administrativa do Ne@ad
e Coordenadora UAB
Maria José Campos Rodrigues

Coordenadora do Curso
Angela Emilia de Almeida Pinto

LDI coordenação
Heliana Pacheco, José Otavio Lobo Name,
Hugo Cristo

Gerência
Verônica Salvador Vieira

Ilustração
Lidiane Cordeiro e Vitor Bergami Victor

Editoração/ Capa
Ivanise Borges

Impressão
GM Gráfica

Revisor de Conteúdo
Antônio Canal Neto.

Revisor de Linguagem
Santinho Ferreira de Souza

Design Gráfico
LDI - Laboratório de Design Instrucional

Ne@ad
Av.Fernando Ferrari, n.514 -
CEP 2907w5-910, Goiabeiras -
Vitória - ES
4009 2208

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Biral, Andressa Cesana.
B617g Geometria analítica / Andressa Cesana Biral, Joccitiel Dias da Silva. - Ed. rev. - Vitória : Universidade Federal do Espírito Santo, Núcleo de Educação Aberta e à Distância, 2009.
78, [9] p. : il.

Inclui bibliografia e índice.
ISBN: 978-85-99510-50-6

1. Geometria analítica. I. Silva, Joccitiel Dias da. II. Título.

CDU: 514.12

Apresentação

A Geometria Analítica é importante no seu curso porque ela aparece como ferramenta em outras disciplinas como o Cálculo Diferencial e a Física. Este texto faz uma retomada de alguns assuntos que já estudou, mas apresenta conteúdos novos mais específicos.

Notas históricas foram introduzidas por acreditarmos que a história da Matemática deve ser parte inerente do estudo de qualquer conteúdo matemático, procuraremos, sempre que possível, apresentá-las juntamente com o conteúdo a ser apreendido.

Serão propostas também atividades/problemas que você deverá sempre tentar resolvêlas.

Pode-se dizer que a resolução de problemas é uma área de estudos atualmente da Matemática que se preocupa em demonstrar a importância fundamental de como os problemas práticos do cotidiano, que sejam significativos para o aluno, são imprescindíveis para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Dessa forma, esperamos que você sinta-se motivado a resolver problemas!

Estaremos nos baseando em livros-textos já existentes, de modo que você não deve se limitar apenas ao que propomos aqui. Esses textos estarão todos citados não só no decorrer deste livro como também nas nossas referências.

Sumário

Vetores e Combinações Lineares

Uma grandeza escalar é definida por um número que exprime a relação entre esse número e uma unidade de medida pré-fixada. A massa, a temperatura, a densidade são exemplos de grandezas escalares.

Por outro lado, grandezas vetoriais; tais como as forças, os deslocamentos de um ponto, as velocidades; não podem ser caracterizadas apenas por um número.

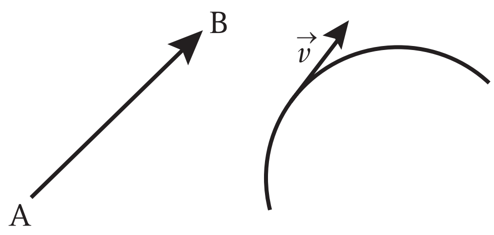


Figura 1.1

Os vetores (*vetores geométricos*) servem para expressar de uma maneira abstrata as grandezas vetoriais físicas.

O cálculo vetorial, parte de nossa atenção neste curso, estuda as operações efetuadas com vetores, e surgiu para satisfazer as exigências da física. Estas operações são abstrações matemáticas de certas operações comuns efetuadas com diversas grandezas vetoriais em física.

1.1 Coordenadas Cartesianas

O *Sitema de Coordenadas Cartesianas* é construído a partir da escolha de uma unidade de comprimento e de duas retas numeradas numa certa ordem, isto é, indicamos qual será a primeira. O ponto de interseção das retas é denominado *origem das coordenadas*.

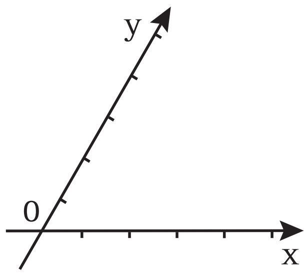


Figura 2

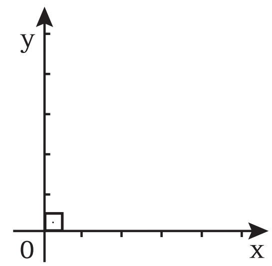


Figura 3

No primeiro desenho, temos o sistema cartesiano oblíquo, e, no segundo, um sistema cartesiano ortogonal. O segundo é o mais utilizado, e, durante o curso, veremos que ao adotarmos este sistema muitas das contas serão simplificadas. As retas numeradas são denominadas *eixos de coordenadas*, *o eixo horizontal* é chamado de *eixo das abscissas* e o vertical ou inclinado eixo das ordenadas.

1.1.1 Coordenadas Cartesianas Ortogonais

No plano $\mathbb{R}^2$

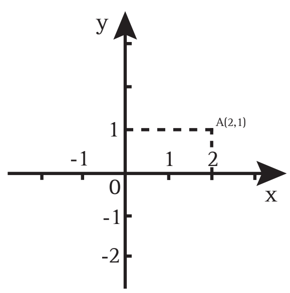


Figura 4

No espaço $\mathbb{R}^3$

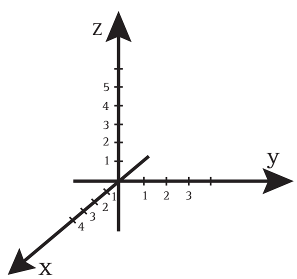


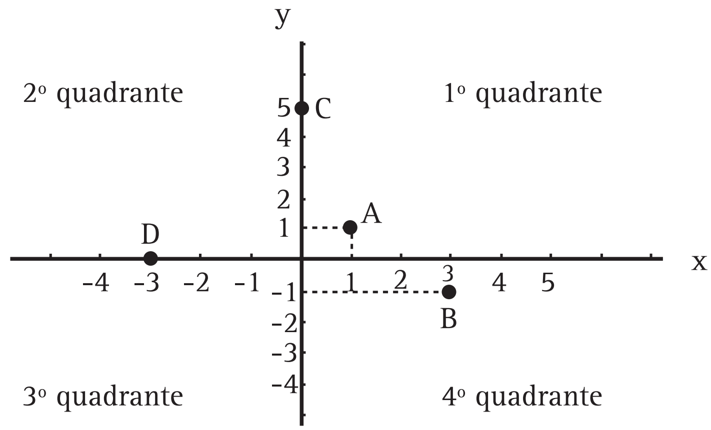
Figura 5

O **Sistema de Coordenadas Cartesianas** *é um esquema para especificar pontos no plano ou no espaço tridimensional desenvolvido em 1637 pelo matemático e filósofo francês Descartes. Basicamente, o "Sistema de Coordenadas" foi desenvolvido unindo a Álgebra com a Geometria Euclidiana, criando assim a Geometria Analítica. Os trabalhos de Descartes permitiram o desenvolvimento de áreas científicas, como o cálculo e a cartografia. Cartesiano é um adjetivo que se refere ao autor, também conhecido pelos gregos como Cartesius.*

Atividades Resolvidas

1. Num sistema cartesiano ortogonal, localize os pontos $A(1, 1)$, $B(3,-1)$, $C(0, 5)$ e $D(-3, 0)$.

Solução:



O sistema cartesiano ortogonal divide o plano em quatro regiões chamadas quadrantes. A figura acima mostra a disposição de cada um deles.

2. Em cada um dos casos abaixo, esboce o conjunto dos pontos cujas coordenadas x, y cumprem as condições especificadas:

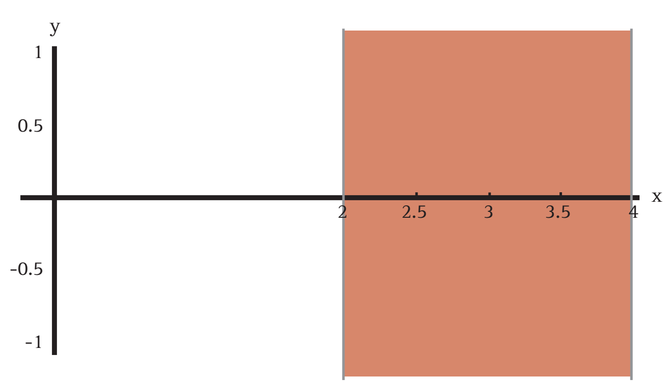
a) $|x - 3| < 1$

Solução:

De acordo com a definição de módulo de um número $|x|$, pode-se escrever:

$|x - 3 \geq 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$, daí $x - 3 < 1 \Rightarrow x < 1 + 3 \Rightarrow x < 4$.
$|x - 3| < 0 \Rightarrow |x - 3| = -x + 3$, daí $-x + 3 < 1 \Rightarrow -x < 1 - 3 \Rightarrow x > 2$.

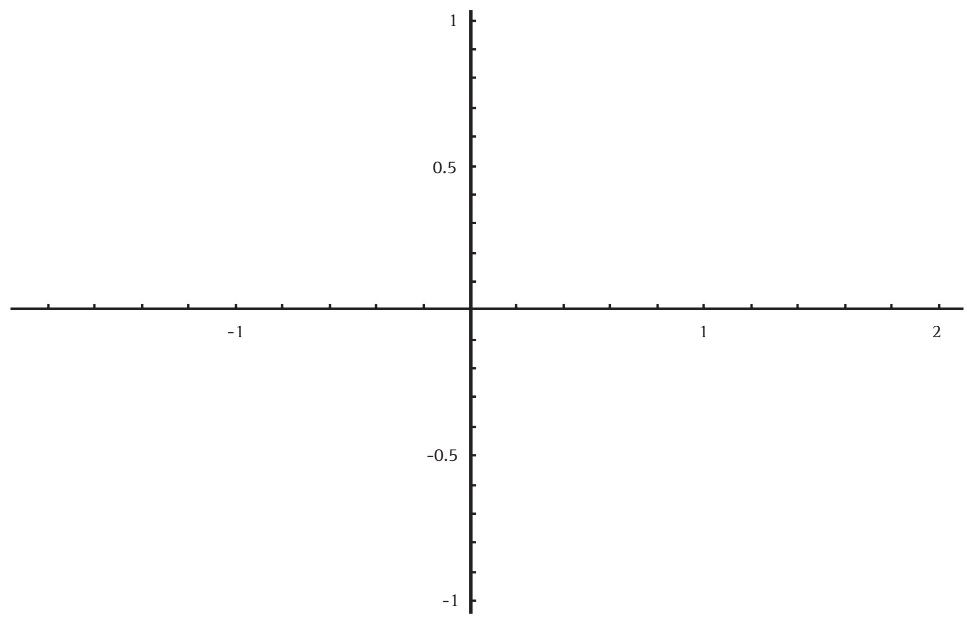
Logo, o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < x < 4\}$ pode ser descrito geometricamente por:



b) $xy = 0$

Solução:

O produto $x.y$ será igual a zero se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$.
No primeiro caso, $(x,y) = (0,1)$ que são as coordenadas dos pontos do eixo OY.
No segundo, tem-se $(x,y) = (x,1)$ que correspondem ao eixo OX.
Geometricamente:



1.1.2 Distância entre dois o pontos

No plano $\mathbb{R}^2$

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ no plano cartesiano, vamos calcular a distância entre eles fazendo uso de suas coordenadas.

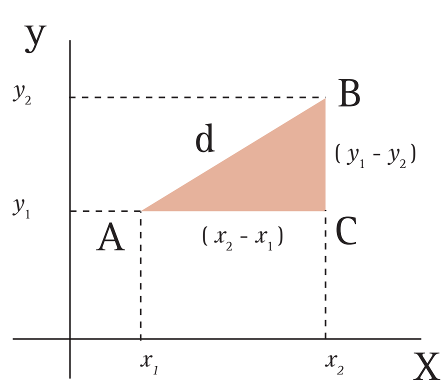


Figura 6

Observe que a distância d entre A e B é a hipotenusa do triângulo ABC, a distância d_1 entre A e C e d_2 entre C e B são seus catetos; utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2,$$

onde $d_1 = |X|$ e $d_2 = |Y|$ com $X = (x_2 - x_1)$ e $Y = (y_2 - y_1)$, assim

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

e daí, vem a fórmula da distância entre dois pontos no $\mathbb{R}^2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observe que os valores de x e y podem ser negativos de acordo com a posição dos pontos A e B no plano.
Se $A(5,2)$ e $B(3,6)$ no exemplo temos X= 5 - 3 $\Rightarrow$ X =2 e Y= 2 - 6 $\Rightarrow$ Y= - 4
Nisto definimos $d_1 = |X|$ e $d_2 = |Y|$ que são distâncias.
X e Y são projeções que veremos mais adiante.

No espaço $\mathbb{R}^3$

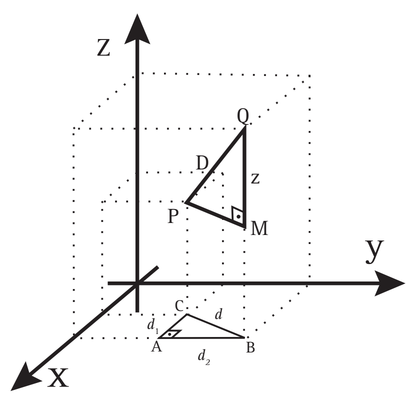


Figura 10.1

A distância D entre $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ é a hipotenusa do triângulo PMQ, sendo seus catetos as distâncias d e d_3 entre os pontos P e M, M e Q respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$D^2 = d^2 + d_3^2, \tag{1.1}$$

Mas, a distância d entre P e M é a hipotenusa do triângulo ABC no plano xy, e a distância d_1 entre A e C e d_2 entre C e B são seus catetos, utilizando o teorema de Pitágoras novamente obtemos

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2. \tag{1.2}$$

onde

$$d_1 = |X|,\ d_2 = |Y| \text{ e } d_3 = |Z|, \text{ com } X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1 \text{ e } Z = z_2 - z_1. \tag{1.3}$$

Substituindo (1.2) em (1.1)

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

e daí, a *fórmula da distância entre dois pontos no* $\mathbb{R}^3$

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{1.4}$$

Atividades Resolvidas

1. O triângulo ABC com $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$ é equilátero. Quais são os possíveis valores de y?

Solução:

Verifique que o ponto C está na mediatriz do segmento AB. Logo, para qualquer valor de y, tem-se $d(A,C) = d(B,C)$. Mas, como o triângulo ABC é equilátero, por hipótese, devemos ter:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= d(A,C) \\ \sqrt{(a-(-a))^2 + 0^2} &= \sqrt{(-a)^2 + y^2} \\ \sqrt{4a^2} &= \sqrt{a^2 + y^2} \\ y^2 &= 3a^2 \\ y &= \pm\sqrt{3}\,|a| \end{aligned}$$

1.1.3 Segmentos orientados

Um dos axiomas da Geometria Euclidiana diz que: "Dois pontos distintos A e B do espaço determinam uma única reta." Denotaremos por AB o seguimento de reta entre os pontos A e B, e por $\overrightarrow{AB}$ o *segmento orientado* com origem em A e extremidade em B. Se $A = B$, diremos que $\overrightarrow{AB}$ é um segmento orientado nulo, estamos identificando, assim, pontos com segmentos nulos.

Observe que AB é o conjunto de pontos da reta entre A e B, e $\overrightarrow{AB}$ além disso, tem uma orientação.

Definição 1.1. *Fixada uma unidade de comprimento, podemos associar a cada segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$ *um número real, não negativo, que é o seu comprimento em relação àquela unidade. Denotaremos por* $\|\overrightarrow{AB}\|$ *o comprimento do segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$.

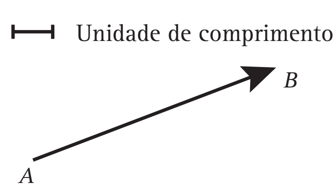


Figura 11.1

Observe que o comprimento de um segmento orientado nulo é igual a zero.

Definição 1.2. *Diremos que o segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$ *é equipolente ao segmento orientado* $\overrightarrow{MN}$ *, se ocorrer uma das três afirmações abaixo:*
1) A=B e M=N.
2) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{MN}$ *estão situados sobre uma mesma reta, e ao deslizar* $\overrightarrow{MN}$ *sobre essa reta, A coincida com M e B com N.*
3) Ligando-se os pontos A a B, B a N, N a M e M a A, obtem-se um paralelogramo.

Notação: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$

Por esta definição, dois pontos são equipolentes quando considerados como segmentos orientados.

Sejam os pontos A e B distintos, na definição desejada veremos que não estão excluídos os casos $\overrightarrow{AA}$ e $\overrightarrow{BB}$, ou seja; podemos "ver" o ponto A como o seguimento nulo $\overrightarrow{AA}$ e B como $\overrightarrow{BB}$.

Observação 1.1. *A definição de equipolência imediatamente acima pode parecer confusa em um primeiro momento. Mas, olhando geometricamente (***Atividade resolvida abaixo***), o conceito de equipolência entre segmentos orientados é mais compreensivo. Interessante também observar expressões do tipo: "deslizar sobre a reta".*

Atividades Resolvidas

1. Mostre que dados dois segmentos equipolentes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{MN}$ não nulos, o ponto médio do segmento AN coincide com o ponto médio de BM.

Solução:

Definição 1.3 (Ponto Médio). *O ponto médio de um segmento AB é um ponto M de AB tal que d(A,M) = d(M,B).*

No primeiro item da definição (1.2) de equipolência, temos que considerar A B e $M = N$. Nesse caso, ocorre que o segmento AN coincide com o segmento BM. Assim, o ponto médio de um será necessariamente o ponto médio do outro. Observe:

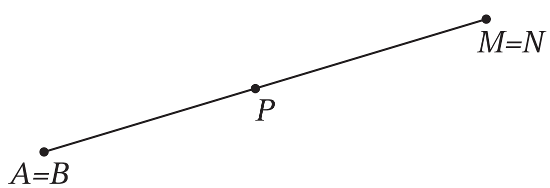


Figura 12.1

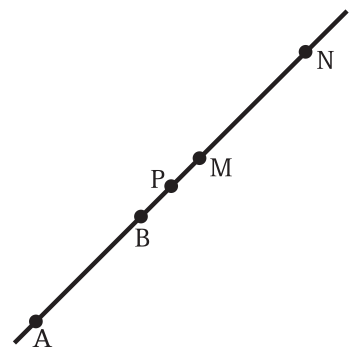


Figura 13.1: Segmentos Equipolentes Colineares

Provaremos agora, no caso de termos segmentos equipolentes colineares, que P, o ponto médio de AN, é também ponto médio de BM.
Já que *segmentos equipolentes têm o mesmo comprimento*[1] e P é ponto médio de AN, tem-se por definição:

$$\begin{aligned} d(A,P) &= d(P,N) \\ d(A,B) + d(B,P) &= d(P,M) + d(M,N) \\ d(B,P) &= d(P,M) \end{aligned}$$

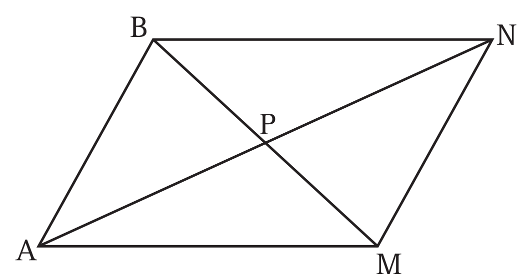


Figura 14.1: Segmentos Equipolentes não-colineares

Para o último caso, basta verificar que *num paralelogramo suas diagonais se cortam exatamente ao meio.*

[1]A demonstração desse fato fica a cargo do leitor.

Atividades Propostas

1. Encontre a equação do círculo com raio r e centro $C(h,k)$. A seguir, deduza de forma semelhante a equação da esfera com raio r e centro $C(h,k,l)$.

2. Mostre que a relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz às seguintes propriedades:

i) Reflexividade : $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.
ii) Simetria : Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$ então $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{AB}$.
iii) Transitividade : Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{PQ}$ então $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$.

3. Mostre que se $\overrightarrow{AB}$ for equipolente a $\overrightarrow{CD}$, então $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{CD}||$.

4. Diz-se que o ponto A' é o *simétrico* do ponto A em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Sabendo que $A = (x, y)$ determine os simétricos de A em relação aos eixos de coordenadas x e y respectivamente.

5. Descreva o conjunto de pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem $x^2 - 5x + 6 = 0$.

6. Esboce o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |y| \leq x \leq 3\}$.

7. O ponto X' chama-se *simétrico* do ponto X em relação ao ponto A, quando A é o ponto médio do segmento XX'. Qual é o simétrico do ponto $X = (x, y)$ em relação ao ponto $A = (a, b)$? Em particular, qual é o simétrico de X em relação à origem $O = (0, 0)$?

1.2 Vetores

Definiremos nesta seção um dos conceitos fundamentais deste curso, ou seja; "os vetores". Para isso, utilizaremos a definição de equipolência entre segmentos orientados. É importante, caro aluno, que, neste momento, expressões como "deslizar sobre uma reta" e "deslocar no espaço", quando se trata de segmentos orientados; já sejam familiares.

Definição 1.4. *O* **vetor** *determinado pelo segmento orientado é o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço que são equipolentes ao segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$.

Por conveniência, usaremos a mesma representação $\overrightarrow{AB}$ tanto para segmento orientado quanto para vetor. Mas deve ficar claro que estamos falando de dois objetos matemáticos distintos, ou seja:

1) O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é um conjunto de pontos da reta que passa por A e B.
2) E o vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$ é um conjunto de segmentos orientados equipolentes ao segmento $\overrightarrow{AB}$.

Estamos identificando o vetor determinado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ com o próprio segmento. Assim, podemos representar um mesmo vetor por uma infinidade de segmentos orientados, pois dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{MN}$ representam um mesmo vetor, se, e somente se, eles são equipolentes. Também indicaremos vetores por letras minúsculas com flechas em cima, tais como $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Observe que dados um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e um ponto P do espaço existe um, e somente um, segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ que é equipolente a $\overrightarrow{AB}$. Portanto o vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$ (ou o vetor $\overrightarrow{AB}$) tem exatamente um representante em cada ponto do espaço.(Fig. 9)

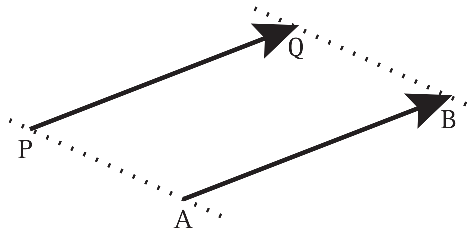


Figura 15.1

Atividades Resolvidas

O problema do Tesouro

Recentemente, foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra, descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções.

"... qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei A *e* B*, e também uma palmeira, que chamarei* C*. Eu enterrei o tesouro em um ponto* X *que pode ser encontrado da seguinte forma.*

Caminhe de C *para* A *contando seus passos. Chegando em* A*, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto* M.

Volte ao ponto C.

Caminhe de C *para* B *contando seus passos. Chegando em* B*, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto* N.

O ponto X *está na reta que liga* M *a* N*, e a mesma distância desses dois pontos."*

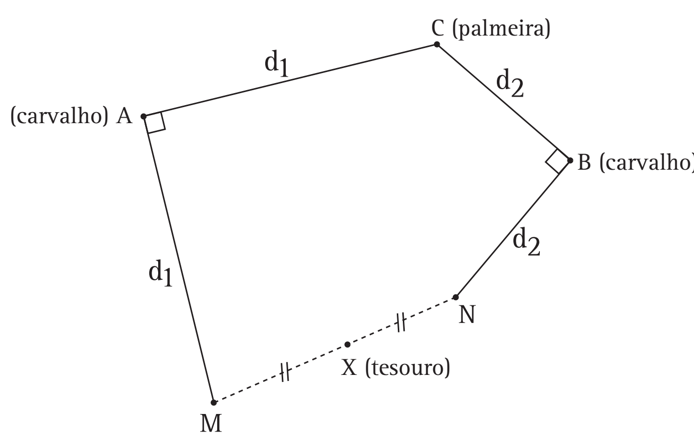


Figura 16.1

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram à referida ilha, mas tiveram uma desgradável surpresa. Os carvalhos (**A** e **B**) lá estavam, mas a palmeira (**C**) tinha desaparecido completamente.

O tesouro estava perdido.

Entretanto, fazia parte da comitiva o matemático Augusto Wagner Carvalho que, após breves cálculos, conseguiu descobrir o tesouro e, naturalmente, reivindicou para si a sua posse.

Como ele fez isso?

A solução do problema do Tesouro

Augusto Wagner Carvalho estabeleceu na ilha, que felizmente era plana, um sistema de coordenadas com origem em **A** e com o ponto **B** no eixo dos **X**. Ele mediu a distância de **A** até **B** e encontrou 40 metros. Assim, ficou estabelecido que $A = (0, 0)$, $B = (40, 0)$ e para a palmeira desaparecida ele pôs $C = (x, y)$. Temos então que:

$$\vec{AC} = (x, y),\ \vec{AM} = (y, -x),\ \vec{BC} = (x - 40, y)$$

e

$$\vec{BN} = (-y, x - 40).$$

Como A é a origem, as coordenadas do ponto M são $M = (y, -x)$. Logo, $\vec{BN} = (40 - y, x - 40)$.

Sendo **X** o ponto médio de MN, suas coordenadas são dadas por

$$X = \left(\frac{y + 40 - y}{2}, \frac{-x + x - 40}{2}\right) = (20, -20)$$

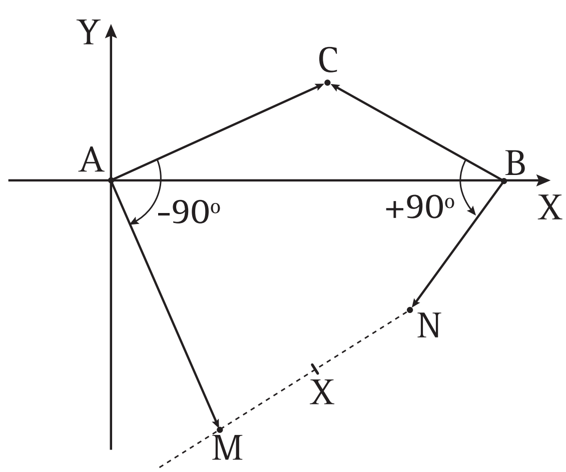


Figura 17.1

Portanto, para encontrar o tesouro, bastava andar 20m na direção de **A** para **B** e depois virar à direita e andar mais 20m. Competência de Augusto Wagner e azar de Barba Negra. A localização do tesouro ficou independente da palmeira.

Atividades Propostas

1. Calcular as coordenadas da origem do vetor $\vec{a} = (2,-3,-1)$, se sua extremidade coincide com o ponto $M(1,-1,2)$.

2. Sejam α, β, γ os ângulos que um vetor $\vec{v}$ forma com os eixos coordenados. Os $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são denominados cossenos diretores do vetor $\vec{v}$. Mostre que os cossenos diretores de um vetor satisfaz a:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

3. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário (chamado versor de $\vec{v}$).

Os vetores são expressões abstratas de grandezas físicas concretas. Na próxima seção, iniciaremos o estudos das operações com vetores, o Cálculo Vetorial. O **Cálculo Vetorial** *surgiu para satisfazer às exigências físicas, e os vetores são os seus objetos, da mesma maneira que os números são os objetos da aritmética.*

1.3 Operações Lineares

São duas as operações lineares com vetores, a soma entre dois vetores, e o produto de um vetor por um escalar.

1.3.1 Soma de Vetores

Motivados pela composição de forças em mecânica, definiremos agora a soma de dois vetores.

Definição 1.5. *Sejam dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, escolhendo um ponto P qualquer do espaço e escrevendo $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{QM}$, definimos o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ como sendo o vetor determinado pelo segmento orientado $\overrightarrow{PM}$.*

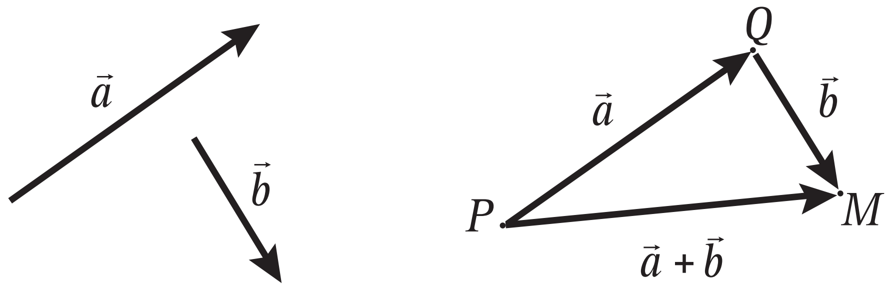


Figura 18.1

Propriedades da soma de vetores

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e , $\vec{w}$ são vetores, então valem as seguintes propriedades:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade);

b) Existe um único vetor denotado por $\vec{0}$ tal que $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ (vetor nulo);

c) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade);

d) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um único vetor denotado por $-\vec{v}$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$ (vetor simétrico).

Atividades Resolvidas

1. Demonstre a propriedade **c)** da soma de vetores.

Solução:

Sabendo que cada coordenada do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, é a soma das coordenadas correspondentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem-se:

Tomando $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$, vem:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (a + c, b + d) + (e, f) =$$
$$(a + c + e, b + d + f) = (a, b) + (c + e, d + f) =$$
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

2. Prove a lei do cancelamento para soma de vetores:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w} \text{ se } \vec{u} \neq \vec{0}$$

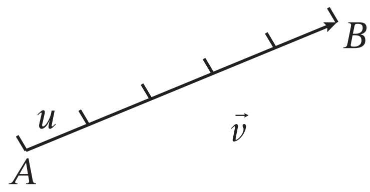
Solução:

Basta somar o simétrico de $\vec{u}$ à expressão acima:

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$
$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} = \vec{u} + \vec{w} - \vec{u}$
$\vec{u} - \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} - \vec{u} + \vec{w}$
$\vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w}$
$\vec{v} = \vec{w}$

1.3.2 Produto de vetor por um escalar

A igualdade na Atividade Proposta (1.1-3) permite definir o comprimento de um vetor $\vec{v}$ como sendo $\|\overrightarrow{AB}\|$, onde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, pois se também $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, então $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$. O *comprimento* de um vetor será também denominado *norma* ou *módulo*.



$$\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = 5 \textit{ unidades de comprimento}(u)$$

Figura 19.1

Sejam $\vec{v}$ um vetor qualquer e γ um número real arbitrário, a norma possui as seguintes propriedades:

i) $\|\vec{v}\| \geq 0$; e $\|\vec{v}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.
ii) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\ \|\vec{v}\|$.

Definição 1.6. *O produto de um vetor* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *por um número real* $\lambda \neq 0$, *é um vetor denotado por* $\vec{v}$, *tal que:*

1) módulo: $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\ \|\vec{v}\|$;
2) direção: *a mesma de* $\vec{v}$;
3) sentido: *o mesmo de* $\vec{v}$ se $\lambda > 0$, *e contrário de* $\vec{v}$ *se* $\lambda < 0$.
Se $\vec{v} = \vec{0}$ *ou* $\lambda = 0$, *colocamos por definição,* $\lambda\vec{v} = \vec{0}$.

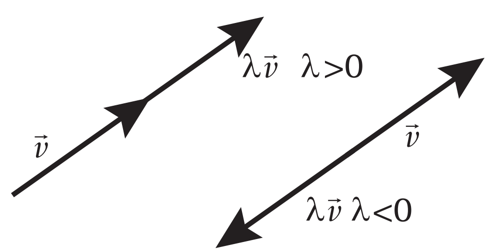


Figura 20.1

Propriedades do Produto de vetor por um escalar

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e λ e μ números reais, então valem as seguintes propriedades:

a) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ (distributividade em relação à soma de escalares);
b) $(\lambda(u\vec{v}) = (\lambda u)\vec{v}$
c) $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade).
d) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (distributividade em relação à soma de vetores);

Atividades Resolvidas

1. Demostre a propriedade **c)** da multiplicação de um vetor por um escalar.

Solução:

$1\vec{v} = 1.(a,\ b) = (1.a,\ 1.b) = (a,\ b) = \vec{v}$

2. Prove que $\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$, onde 2 R

Solução:

$\vec{u} = \vec{v}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{v} - \vec{v} \Rightarrow$
$(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$
$\vec{u} - \vec{v} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{v} \Rightarrow$
$\vec{u} = \vec{v}$

Espaço Vetorial

Segue um resumo das propriedades da soma de vetores e da multiplicação de vetores por escalares.

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade);
2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade);
3) Existe um único vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ (vetor nulo);
4) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um único vetor $-\vec{v}$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$ (vetor simétrico);
5) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \vec{u}$ (distributividade em relação à soma de vetores);
6) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ (distributividade em relação à soma de escalares);
7) $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda u)\vec{v}$, (associatividade);
8) $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade).

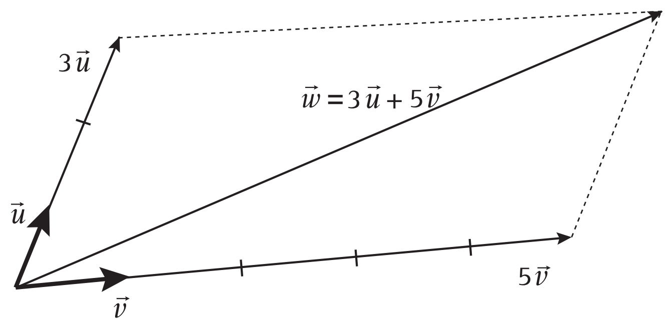
Estas propriedades servirão para caracterizar, no futuro, em álgebra linear, certos conjuntos que apesar de terem natureza diferente dos vetores no espaço, "comportam -se" como se fossem vetores geométricos. Estes conjuntos receberão o nome de **espaços vetoriais.**

1.3.3 Combinações lineares

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ escalares quaisquer. Um vetor $\vec{v}$ que pode ser expresso na forma

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

onde estão envolvidas apenas as operações lineares, denomina-se **combinação linear** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.



O vetor $\vec{w}$ escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Figura 21.1

Dependência e Independência Linear

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores dados. Pode ocorrer, então, uma das duas seguintes situações:

1) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm representantes sobre uma mesma reta r.

Isto é, fixado um ponto $P \in r$, podemos representar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PA}$, com A e B pertencentes à r. E isso acontece se, e somente se, existe um número real x tal que $\vec{u} = x\vec{v}$ ou $\vec{v} = x\vec{u}$, isto é; podemos escrever um deles como combinação linear (múltiplo escalar) do outro. E, neste caso, diremos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares (paralelos)** ou **linearmente dependentes**.

Se, por exemplo, $\vec{u} \neq \vec{0}$, dado um ponto Q qualquer de r, então existe um escalar x (unicamente determinado) tal que $\overrightarrow{PQ} = x\vec{u}$, por essa razão, diremos que um vetor não nulo *gera uma reta*.

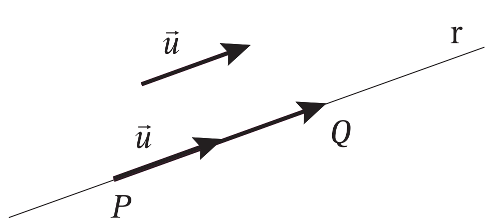


Figura 22.1

Por outro lado, existe uma infinidade de escalares x e y, tais que $\overrightarrow{PQ} = x\vec{u} + y\vec{v}$. A existência de uma infinidade de tais escalares será melhor compreendida mais adiante.

2) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não têm representantes sobre uma mesma reta.

Sendo assim, não podemos escrever um deles como múltiplo escalar do outro, ou melhor, não podemos escrever um deles como combinação linear do outro. E, neste caso, diremos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **não-colineares (não-paralelos)** ou **linearmente independentes.**

Assim, fixando P um ponto qualquer do espaço, e, escrevendo $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$, vemos que os segmentos orientados $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, determinam um plano, pois os pontos P, A, B, são não colineares, e da geometria elementar temos que:
Três pontos não colineares determinam um único plano.

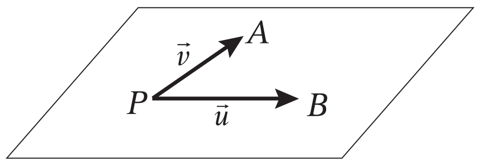


Figura 23.1

Consideremos agora três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não simultaneamente nulos. Então pode ocorrer um dos dois casos abaixo:

1) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm representantes num mesmo plano, temos portanto que:
i) ou $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares, isto é, possuem representantes em uma mesma reta;
ii) ou $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não-colineares.

Na situação do item *i*) os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ geram uma reta, e no item *ii*) geram um plano. Em ambos os casos *i*) e *ii*), podemos escrever um dos vetores como combinação linear dos outros dois, diremos portanto neste caso que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são **coplanares** ou **linearmente dependentes.**
Logo: $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

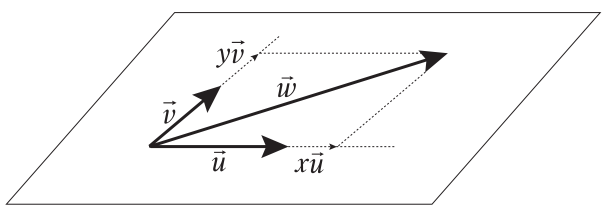


Figura 24.1

2) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não possuem representantes em um mesmo plano.

Observe que não podemos expressar nenhum deles como combinação linear dos outros dois. Diremos que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são **não-coplanares** ou **linearmente independentes.**

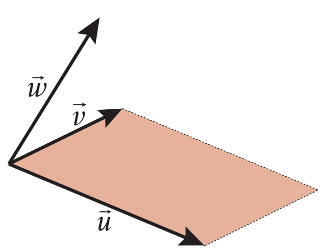


Figura 25.1

Atividades Resolvidas

1. *i)* Mostre a seguinte afirmação:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.(colineares), se, e somente se, a equação $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ tem soluções diferentes da solução trivial $x = y = 0$.

Solução:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.(colineares), se, e somente se, $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, onde $\lambda \neq 0$. Então, tem-se $1\vec{v} - \lambda\vec{u} = 0$, ou seja, $x = 1$ e $y = -\lambda$ são soluções não-triviais da equação $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$.

ii) Escreva uma afirmação semelhante para o caso dos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem L.I. (não-colineares).

Solução:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. (não-colineares), se, e somente se, a equação $x\vec{u} + y\vec{v} = 0$ não tem soluções diferentes da solução trivial $x = y = 0$.

iii) Enuncie uma afirmação semelhante a presente no item i) para três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Solução:

Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são L.D.(coplanares), se, e somente se, a equação

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$$

tem soluções diferentes da solução trivial $x = y = z = 0$.

Demonstração:

Três vetores são L.D. se, e somente se, um deles puder ser expresso como combinação linear dos demais, veja:

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Logo,

$$1\vec{w} - \lambda\vec{u} - \mu\vec{v} = \vec{0}$$

determina uma solução não-trivial para a equação $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

2. Verifique se o conjunto $\{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$ é L.I.:

Solução:

Analisemos a soma vetorial $a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = 0$.

$$a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = 0$$
$$(a, a, a) + (b, 0, b) + (0, c, c) = (0, 0, 0)$$
$$(a + b, a + c, a + b + c) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array}$$

Esse sistema só admite a solução $a = b = c = 0$. Logo, pelo resultado provado no exercício resolvido 1 acima, o conjunto é L.I..

1.3.4 Bases e Coordenadas

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, então, toda combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, todos vetores da forma $x\vec{u} + y\vec{v}$ podem ser representados sobre um mesmo plano . Por outro lado, todo vetor $\vec{a}$ que possa ser representado no plano pode ser escrito como uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é; existe um único par de números reais (x_1, y_1), tal que $\vec{a} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$, ver Fig. 26.1.

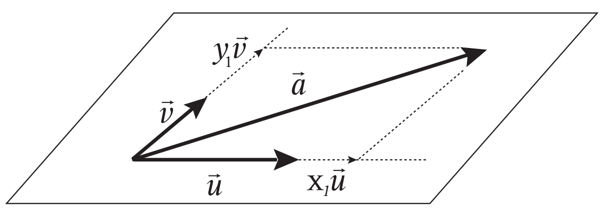


Figura 26.1

Por esse motivo, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I.(não-colineares), diremos que eles geram um plano.

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes, e $\vec{a}$ é um vetor arbitrário, então existe um (único) terno ordenado de escalares (x_1, y_1, z_1) tais que $\vec{a} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w}$.

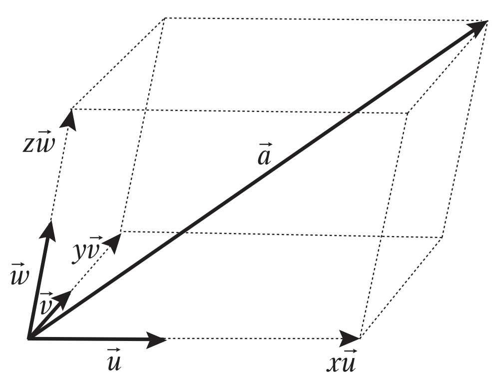


Figura 27.1

Por essa razão, se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são L.I (não-coplanares) diremos que eles geram o espaço.

Um conjunto de três vetores não-complanares(linearmente independetes), será denominado base para o espaço dos vetores. A denominação é bem sugestiva, pois; como vimos anteriormente, um conjunto de três vetores L.I. geram todo o espaço de vetores.

Escolhida uma base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ do espaço, então a cada vetor $\vec{a}$ corresponde um único termo ordenado (x, y, z) de escalares, as coordenadas de $\vec{a}$ em relação a essa base.

Recíprocamente, a cada termo ordenado (x, y, z) de números reais corresponde o vetor $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Em particular, um conjunto de dois vetores não colineares (linearmente independentes) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ formam uma base para o plano.

Se um vetor $\vec{a}$ se escreve como uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é; $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{u} + z\vec{w}$, diremos que os vetores $x\vec{u}$, $y\vec{v}$ e $z\vec{w}$ são os componentes do vetor $\vec{a}$ na direção dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ respectivamente.

Atividades Resolvidas

1. Escreva o vetor $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $\{(1, 1, 1); (1, 0,1); (0, 1, 1)\}$.

Solução:

Queremos obter valores a, b e $c \in \mathbb{R}$ tais que $a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,2,3)$. Essa última expressão dá origem ao sistema

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=2 \\ a+b+c=3 \end{cases}$$

Que tem solução $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$. Assim, $(1, 2, 3) = 0(1, 1, 1) + 1(1, 0, 1) + 2(0, 1, 1)$.

2. Mostre que todo vetor $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores do conjunto $\{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$ e que, portanto, tal conjunto forma uma base de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Devemos encontrar os coeficientes a, b e $c \in \mathbb{R}$, tais que

$$a\,(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = (x, y, z)$$

Tal equação gera o sistema linear

$$\begin{cases} a+b=x \\ a+c=y \\ a+b+c=z \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = x + y$$
$$a = z - y$$
$$c = z - x$$

Bases Ortonomais

Necessitamos do conceito de ângulo entre dois vetores a fim de definirmos bases ortonormais.

Dados dois vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, o *ângulo* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido como o sendo o ângulo = $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, entre os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

O ângulo $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ é o menor ângulo segundo o qual $\overrightarrow{OA}$ deve girar para se tornar colinear com $\overrightarrow{OB}$.

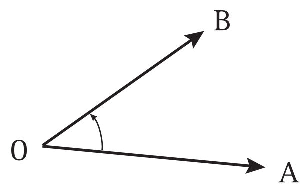


Figura 28.1

Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortogonais* ou *perpendiculares* se existirem segmentos ortogonais $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Se, além disso, $||\vec{v}|| = ||\vec{u}|| = 1$, dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortonormais.*

Uma base formada por vetores ortogonais é denominada base ortogonal; caso seja formada por vetores ortonormais, será denominada base *ortonormal* .

Vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$

Definiremos projeção de um vetor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ sobre uma reta orientada *r*, como sendo o comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{A'B'}$ onde os pontos A' e B' são obtidos baixando perpendiculares das extremidades *A* e *B* do vetor $\vec{a}$ até a reta orientada *r*, juntamente com o sinal positivo se o segmento $\overrightarrow{A'B'}$ tiver a mesma orientação da reta *r*, e com o sinal negativo em caso contrário.

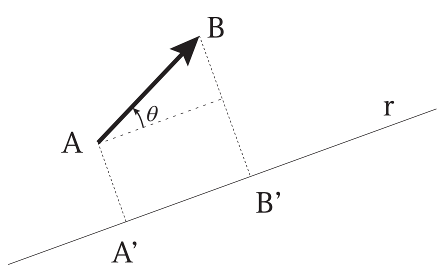


Figura 29.1

Se θ é o ângulo entre o segmento $\overrightarrow{AB}$ e a reta *r*, definimos

$$\text{Proj}_r \overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}|| \cos\theta.$$

O conjunto de vetores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, Fig. 30.1, é uma base ortonormal denominada *base canônica* do $\mathbb{R}^3$.

Observe que ao escrevermos um vetor $\vec{a}$ como uma combinação linear da base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, o terno de números reais (x, y, z) tal que $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é formado pelas Projeções do vetor $\vec{a}$ sobre os eixos coordenados.

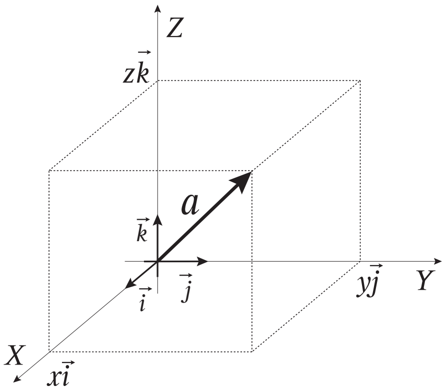


Figura 30.1

Fixada uma base, podemos simplificar a notação do vetor usando para isso somente as suas coordenadas. Por exemplo, fixando a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ podemos escrever o vetor $\vec{a}$ que aparece na figura imediatamente acima da seguinte maneira: $\vec{a} = (x, y, z)$. Neste caso a base fica subtendida. Ao escrevermos os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ nessa mesma base, temos que:

$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, ou simplificadamente $\vec{i} = (1, 0, 0)$,
$\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$, ou $\vec{j} = (0, 1, 0)$,
$\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$, ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Utilizando a mesma notação, o conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ *com* $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ também denominada base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Atividades Propostas

1. Demonstre que a soma de vetores (Definição 1.5) está bem definida.

2. Demonstre as propriedades a), c) e d) da soma de vetores (pág. 19).

3. Demonstre as propriedades a), b) e c) do produto por escalar.

4. Sejam $\vec{v}$ um vetor e um número real, mostre que:

i) $0\vec{v} = \vec{0}$,
ii) $\vec{0} = \vec{0}$.

5. Demonstre que em um quadrilátero qualquer ABCD (não necessariamente convexo), os pontos médios P, Q, R e S dos lados são os vértices de um paralelogramo.

Capítulo 2

Produtos entre vetores

2.1 Produto Escalar (Produto Interno)

Nessa seção, apresentaremos mais três operações com vetores, iniciaremos com o produto escalar. Mas, antes da definição formal, acrescentamos uma nota sobre a sua origem.

O conceito de produto escalar (produto interno) tem sua origem na mecânica. Se o vetor $\vec{u}$ representa uma força cujo ponto de aplicação se desloca da origem para a extremidade do vetor $\vec{v}$, o trabalho dessa força é determinado pela igualdade.

$$W = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\cos\theta, \tag{2.1}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

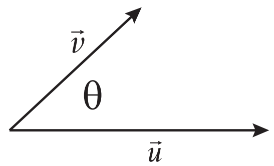


Figura 2.1

Pelo fato dessa grandeza ser um escalar(número) e possuir certas propriedades algébricas de um produto ordinário de números, definimos uma nova operação com base nessa grandeza denominada de produto escalar.

Definição 2.1. *Denomina-se produto escalar de dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e indicado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ um número igual ao produto dos módulos desses vetores pelo co-seno do ângulo desses vetores.*

Designando por $(\vec{u}, \vec{v})$ o ângulo entre esses dois vetores, podemos, então, expressar o produto escalar entre eles pela fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos\theta . \tag{2.2}$$

Interpretação Geométrica do Produto Escalar

Observe que $||\vec{u}|| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$, *temos portanto que*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||\mathrm{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} . \tag{2.3}$$

Se $||\vec{v}|| = 1$, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{Proj}_r \vec{u} . \tag{2.4}$$

onde r é o eixo na direção de $\vec{v}$.

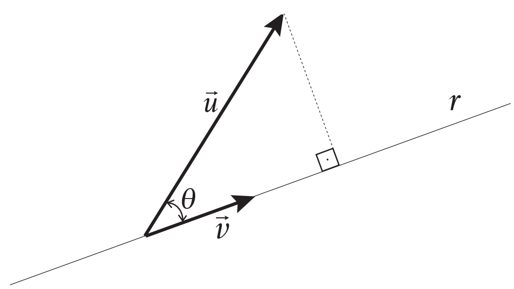


Figura 2.2

Propriedades do Produto Escalar

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o escalar x, o produto escalar satisfaz às seguintes propriedades:

1. Comutatividade (simetria).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} .$$

2. Associatividade em relação ao fator escalar.

$$x(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (x\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (x\vec{v}).$$

3. Distributividade em relação à adição.

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} .$$

Atividades Resolvidas

1. Demonstre a propriedade (1.) do produto escalar acima.

Solução:

De acordo com a definição (2.1), tem-se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos\theta = ||\vec{v}|| \, ||\vec{u}|| \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. Demonstre que um vetor pode ser escrito como:

$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$, desde que $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ formem uma base ortonormal de vetores de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Se $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ formam uma base, então para qualquer vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Tomando o produto escalar por $\vec{i}$ nos dois membros da igualdade anterior

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{i} &= (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot \vec{i} \\
\vec{u} \cdot \vec{i} &= a(\vec{i} \cdot \vec{i}) + b(\vec{j} \cdot \vec{i}) + c(\vec{k} \cdot \vec{i}) \\
\vec{u} \cdot \vec{i} &= a \,.1 + b.0 + c.0 \\
\vec{u} \cdot \vec{i} &= a
\end{aligned}$$

Repetindo-se o procedimento acima, efetuando o produto escalar em toda equação pelos vetores $\vec{j}$ e $\vec{k}$, temos que $\vec{u} \cdot \vec{i} = a$, $\vec{u} \cdot \vec{j} = b$ e $\vec{u} \cdot \vec{k} = c$, e o resultado segue.

Neste último exercício, foram utilizados os fatos de que vetores ortogonais não-nulos têm produto interno nulo bem como o produto interno de um vetor unitário por ele próprio é igual a 1. Tais fatos são demonstrados com muita facilidade e ficam como exercício para o leitor.

Proposição 2.1. Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal, e $\vec{a} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w}$, $\vec{b} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v} + z_2\vec{w}$ são vetores quaisquer, então

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Demonstração:

Utilizando as propriedades do produto escalar e o fato do conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ser ortonormal, segue que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w}) \cdot (x_2\vec{u} + y_2\vec{v} + z_2\vec{w})$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= x_1x_2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + x_1y_2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + x_1z_2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \\ &\quad y_1x_2(\vec{v} \cdot \vec{u}) + y_1y_2(\vec{v} \cdot \vec{v}) + y_1z_2(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \\ &\quad z_1x_2(\vec{w} \cdot \vec{u}) + z_1y_2(\vec{w} \cdot \vec{v}) + z_1z_2(\vec{w} \cdot \vec{w})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= x_1x_2(1) + x_1y_2(0) + x_1z_2(0) + \\ &\quad y_1x_2(0) + y_1y_2(1) + y_1z_2(0) + \\ &\quad z_1x_2(0) + z_1y_2(0) + z_1z_2(1)\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Observe que, usando a definição do produto escalar e a proposição anterior, a norma de um vetor $\vec{v}$ é dada por

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}\ . \qquad (2.5)$$

De fato, pela definição de produto escalar, temos que $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||\ ||\vec{v}||\cos\theta$, como neste caso $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ e obtemos assim a equação (2.5).

E pela proposição anterior, se $\vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, então a norma de $\vec{v}$ fica:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\ . \qquad (2.6)$$

Atividades Resolvidas

1. Determine o produto escalar dos pares de vetores a seguir utilizando a proposição (2.1):

a) $\{2\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}\ ,\ 1\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}\}$

Solução:

$(2\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}) \cdot (1\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}) = 2.1 + 1.(-2) + 1.0$

$(2\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}) \cdot (1\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}) = 0$

b) $\{ \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}, \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k} \}$

Solução:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

2. Prove a Desigualdade de *Cauchy-Schwarz*:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

Solução:

Seja dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não nulos. A projeção do vetor $\vec{a}$ sobre o eixo que contém $\vec{b}$ é um vetor que é múltiplo do vetor unitário $\frac{b}{\|b\|}$. Observe que

$$\vec{p} = \left(\vec{a} \cdot \frac{b}{\|b\|}\right)\frac{b}{\|b\|},$$

e também que $\|\vec{p}\| \leq \|\vec{a}\|$, mas

$$\|\vec{p}\| = \left\|\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{a}\right)\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

pois $\left\|\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right\| = 1$, logo,

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|} \leq \|\vec{a}\|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

Atividades Propostas

1. Demonstre as propriedades (2.) e (3.) do produto escalar (pág. 30).

2. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não simultaneamente nulos, diremos que o vetor $\vec{u}$ é perpendicular (ou ortogonal) ao vetor $\vec{v}$ quando $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3. Os vetores $\vec{a} = (1, 0, -1)$ e $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ são perpendiculares? Justifique a resposta.

4. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (0, 1, -3)$ e $\vec{b} = (0, 2, 0)$.

5. Demonstre que se $\vec{u}$ é um vetor tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{0}$.

6. Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares.

7. O triângulo formado pelos pontos P(1,–3,–2), Q(2, 0,–4) e R(6,–2,–5) é retângulo?

8. Para que valores de b os vetores $\vec{u} = (-6, b, 1)$ e $\vec{v} = (b, b, 5)$ são ortogonais?

9. Use a desigualdade de Cauchy-Scwharz para provar a Desigualdade Triangular:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

10. Prove que dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem-se

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

(Lei do Paralelogramo)

2.2 Produto Vetorial (Produto Externo)

Na definição do produto escalar, cada par ordenado de vetores$(\vec{u}, \vec{v})$ é associado a um escalar(número real) denotado por $\vec{u}, \vec{v}$. Na operação que definiramos a seguir, a cada par ordenado de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ associaremos um único vetor denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$. Necessitaremos na definição do Produto Vetorial da noção de *base positiva* definida a seguir.

Uma base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ será denominada base positiva, se ela satisfizer a regra da mão direita, ver fig. abaixo.

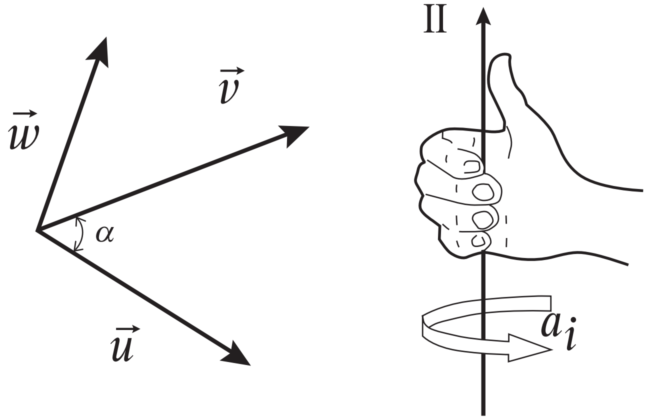


Figura 2.3

A base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é um exemplo de base positiva.

Definição 2.2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não colineares, definimos $\vec{u} \times \vec{v}$ como sendo o único vetor que satisfaz às seguintes condições:

1) O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente.
2) $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,|\text{sen}\ \alpha|$
3) O terno de vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$, é um terno ordenado positivo.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares, definimos $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

> O conceito de produto vetorial também tem sua origem na mecânica. Se o vetor $\vec{u}$ representa uma força aplicada a um ponto qualquer P, dado outro ponto O, o produto vetorial $\overrightarrow{OP} \times \vec{u}$ representa o momento da força $\vec{u}$ em relação ao ponto O.

Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial

Na figura abaixo, observe que $h = ||\vec{v}||\,|\text{sen}\ \alpha|$ é a altura do paralelogramo em relação ao lado determinado pelo vetor $\vec{u}$, assim,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,|\text{sen}\ \alpha| = ||\vec{u}||h = A_{ABC},$$

onde A_{ABC} é a área do paralelogramo que tem por três vértices consecutivos os pontos A, B e C.

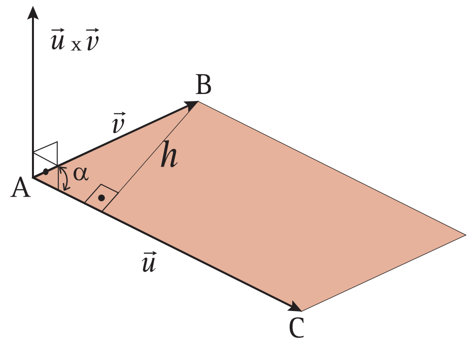


Figura 2.4

A área de um paralelogramo é o comprimento da base vezes a altura.

Propriedades do Produto Vetorial

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o escalar x, o Produto Vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

1. Anticomutatividade.

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.$$

2. Associatividade em relação ao fator escalar.

$$x(\vec{u} \times \vec{v}) = (x\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (x\vec{v}).$$

3. Distributividade em relação à adição.

$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}.$$

Observação 2.1. Faremos uso de propriedades do produto misto ainda a ser definido para demonstrarmos a Propriedade 3.

A proposição a seguir nos permite calcular de modo prático o produto vetorial entre dois vetores, utilizando o conceito de matriz.

Proposição 2.2. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são definidos por suas coordenadas $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ na base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, o produto vetorial do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$ é determinado pela fórmula

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração:

Escrevemos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como $\vec{u} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ e $\vec{v} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ e em seguida calculamos o produto vetorial entre eles.

$$\vec{u} \times -\vec{v} = (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) \times (y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k})$$

Observando que

1) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$
2) $\vec{i} \times \vec{j} = k$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

e fazendo uso das propriedades do produto vetorial, obtemos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x, y, z) = (x_2y_3 - y_2x_3)\vec{i} + (y_1x_3 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

que é uma estrutura equivalente a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Nesta proposição, estamos utilizando somente a notação de determinante, visto que determinante de uma matriz é um número real.

Atividades Resolvidas

1. Demonstre a propriedade (1.) do produto vetorial.

Solução:

De acordo com a proposição (2.2)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} = - \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} = -\vec{v} \times \vec{u} \qquad (2.7)$$

Já que o determinante muda de sinal a cada troca de linhas.

2. Determine os produtos vetoriais indicados a seguir, utilizando a proposição (2.2):

a) $\vec{i} \times \vec{j}$

Solução:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 1.\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{j} - 0\vec{i} = \vec{k} \qquad (2.8)$$

b) $\vec{j} \times \vec{i}$

Solução:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + (-1).\vec{k} = -\vec{k} \qquad (2.9)$$

Atividades Propostas

1. Mostrar num gráfico um representante de cada um dos vetores:

i) $\vec{j} \times 2\vec{i}$
ii) $-3\vec{i} \times 2\vec{k}$

2. Demonstre que se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são vetores quaisquer, então:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}.$$

3. Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2,-6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$.

4. Calcular a área do triângulo de vértices A(1,–2, 1), B(2,–1, 4) e C(–1,–3, 3).

5. Dado os vetores $\vec{a} = (1, 2,-1)$ e $\vec{b} = (0,-1, 3)$, calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{a}$ e $\vec{b} - \vec{a}$.

6. Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (2,-1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1,-3, 1)$.

7. Prove que

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b}).$$

2.3 Produto Misto

O produto entre vetores que definiremos a seguir, associa a cada terno ordenado de vetores um número real.

Definição 2.3 *O produto misto de um termo ordenado de vetores* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *é um número real denotado por* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ *e definido por*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \text{ x } \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto

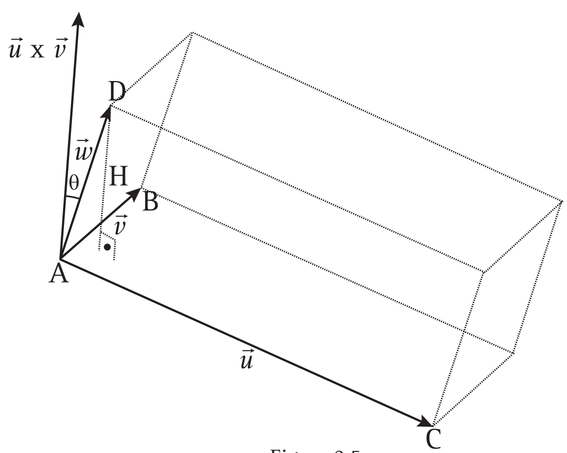


Figura 2.5

Por definição, o produto misto entre os três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado pela equação

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \text{ x } \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Pelas definições dos produtos escalar e vetorial segue que o módulo do produto misto é dado por:

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = ||\vec{u} \times \vec{v}|| \; ||\vec{w}|| \, |\cos\theta|$$

Observe, na figura 2.5,que $H = ||\vec{w}|| \, |\cos\theta|$ é a altura do paralepípedo em relação à base determinada pelos pontos A, B e C, e pela interpretação geométrica do produto vetorial, a área desta base é dada por $A_{ABC} = ||\vec{u} \times \vec{v}||$.

Assim,

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = ||\vec{u} \times \vec{v}|| \; ||\vec{w}|| \, |\cos\theta| = A_{ABC}H = V,$$

onde V é o volume do paralelepípedo de vértices consecutivos A, B, C e D.

Propriedades do Produto Misto

Da comutatividade do produto escalar, temos que:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a},$$

e que os ternos ordenados $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ e $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ determinam o mesmo paralelepípe-pedo, e, portanto:

$$|\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]|.$$

Observe também que $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ e $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$ são ambos positivos ou negativos, temos assim que

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Das observações acima segue que,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \\ &= (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) \\ &= -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} \\ &= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Proposição 2.3. Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são definidos por suas coordenadas $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ e $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)$ na base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, é determinado pela fórmula

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração:

De acordo com a definição de produto misto (2.3), as proposições (2.1) e (2.2) bem como as propriedades dos determinantes, segue que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \Rightarrow$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot (z_1, z_2, z_3) \Rightarrow$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (x_2y_3 - y_2x_3, y_1x_3 - x_1y_3, x_1y_2 - y_1x_2) \cdot (z_1, z_2, z_3) \Rightarrow$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (z_1, z_2, z_2) \Rightarrow$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Atividades Resolvidas

1. Determine o valor do produto misto $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$

Solução:

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = (\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Atividades Propostas

1. Calcular o volume do tetraedro cujos vértices são: $A(1, 2, 1)$, $B(7, 4, 3)$, $C(4, 6, 2)$ e $D(3, 3, 3)$.

2. Mostre que três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é nulo.

3. Verifique se os vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$ são coplanares.

4. Use as propriedades do produto misto para demonstrar que o produto vetorial é distributivo em relação à adição.

Retas

Dado um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^3$, existem infinitas retas que passam por P_0, uma em cada direção. Escolhido arbitrariamente um ponto P, que relação o ponto P deve satisfazer para pertencer à reta que passa por P_0 na "direção" de um vetor dado $\vec{v}$?

3.1 Vetor diretor de uma reta

Observe que um ponto P pertence à reta r que passa por P_0 na "direção" de um vetor $\vec{v}$, se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_0P}$ e $\vec{v}$ são colineares, ou seja; se existir um $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}. \tag{3.1}$$

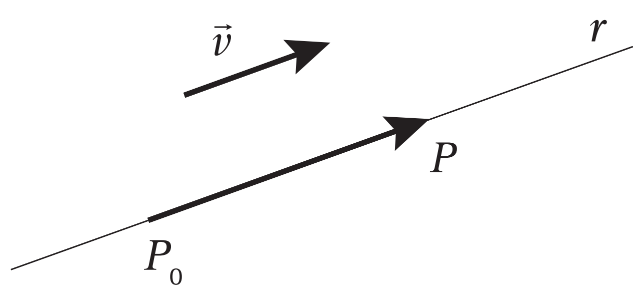


Figura 27

A relação (3.1) responde à pergunta imediatamente acima, o vetor $\vec{v}$ é denominado vetor diretor da reta r.

3.2 Equações Paramétricas de uma Reta

Em geometria analítica, conhecer um ponto ou um vetor é conhecer suas coordenadas, conhecido, portanto o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, vamos "traduzir" a equação(3.1) em termos das coordenadas de P_0, $P(x, y, z)$ e $\vec{v}$. Em outras palavras, queremos determinar relações entre as coordenadas dos pontos P_0 e P e do vetor $\vec{v}$ para que o ponto P pertença a reta r que passa por P_0 na direção de $\vec{v}$.

Vimos logo acima que o ponto P pertence à reta r que passa por P_0 na direção de $\vec{v}$ se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_0P}$ e $\vec{v}$ colineares.

De acordo com (3.1) isto quer dizer que:

$P \in r$ se, e somente se, existir um $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$,

como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, temos que

$P \in r$ se, e somente se, $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c)$,

dois vetores são iguais se, e somente se, suas cordenadas correspondentes são iguais, ou seja;

$$P \in r \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

E daí, obtemos as **equações paramétricas da reta** que passa por P_0 na direção de $\vec{v}$.

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Atividades Resolvidas

1. Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (2,-1, 4)$ na direção do vetor $\vec{u} = (1, 3,-2)$.

Solução:

Um ponto $P(x, y, z) \in r$ se, e somente se, existir um $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$, temos que $\overrightarrow{AP} = (x - 2, y + 1, z - 4)$, assim $P \in r$ se, e somente se, $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $(x - 2, y + 1, z - 4) = t(1, 3,-2)$,

$$P \in r \Leftrightarrow \exists t \in \mathrm{R} \text{ tal que } \begin{cases} x - 2 = t \\ y + 1 = 3t \\ z - 4 = -2t. \end{cases}$$

As equações paramétricas da reta que passa por A na direção de $\vec{u}$ são portanto,

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - 2t. \end{cases}$$

3.2.1 Reta determinada por dois pontos

As relações entre ponto, reta e plano, conceitos primitivos da geometria euclidiana, são estabelecidas por axiomas, um destes axiomas diz que:

Dois pontos determinam uma única reta.

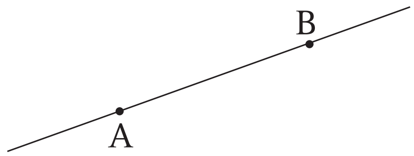


Figura 3.2

Primeiramente, interpretaremos este axioma em termos de vetores (segmentos orientados) e, imediatamente a seguir, em termos de coordenadas de pontos.

Dado dois pontos A e B, qual a condição em termos de vetores (segmentos orientados), para que um ponto P pertença à reta determinada por A e B?

Podemos dizer que um ponto P pertence à reta r determinada por A e B se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares, ou seja; se existir um $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}\,. \tag{3.2}$$

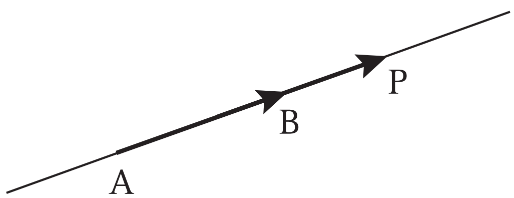


Figura 3.3

Conhecido dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, vamos reescrever a equação (3.2) em termos das coordenadas de A, B e $P(x, y, z)$. Em outras palavras queremos determinar relações entre as coordenadas dos pontos A, B e P para que o ponto P pertença a reta r determinada por A e B. Vimos logo acima que P pertence à reta r determinada por A e B se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares.

De acordo com (3.2) isto quer dizer que:

$P \in r$ se, e somente se, existir um $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, como $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ e $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, temos que $P \in r$ se, e somente se, $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, ou seja;

$$P \in r \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} x - x_1 = (x_2 - x_1)t \\ y - y_1 = (y_2 - y_1)t \\ z - z_1 = (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

e daí obtemos
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B.

3.2.2 Interpretação física de equações paramétricas

Uma função vetorial $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é uma função que associa a cada número real t um único ponto (vetor) $F(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. O conjunto de todos os ternos ordenados $C = \{(x(t), y(t), z(t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ é denominado **curva no espaço**. As equações

$$x = x(t),\ y = y(t) \text{ e } z = z(t),$$

são denominadas **equações paramétricas** de C.

Equações paramétricas a um parâmetro real descrevem o deslocamento de uma partícula material (ponto). Estamos supondo que, no instante t, a partícula esteja no ponto $P(x, y, z)$, onde $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções de t. Fazendo t variar em um certo intervalo, a extremidade do vetor posição $\overrightarrow{OP}$ correspondente a $F(t)$, descreve a trajetória C da partícula.

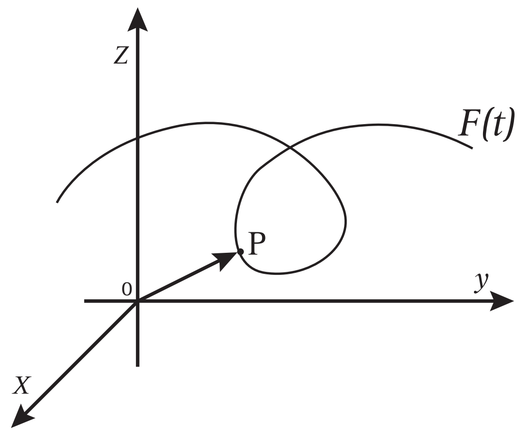


Figura 3.4

As equações paramétricas da reta que passa pelo ponto P_0 na direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, é $r(t) = (x(t), y(z), z(t))$, onde $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ e $z = z_0 + ct$ é um exemplo de uma trajetória de um ponto em $\mathbb{R}^3$.

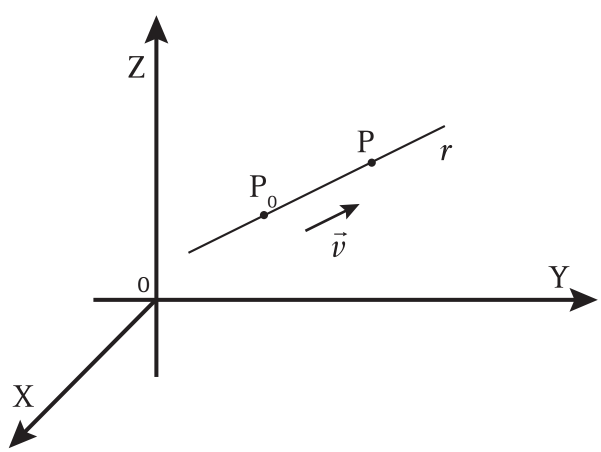


Figura 3.5

Atividades Resolvidas

1. Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $M(1, 2, -3)$ e $N(2, 4, 1)$

Solução:

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{MP}$ e $\overrightarrow{MN}$ forem colineares, isto é; existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{MP} = t\,\overrightarrow{MN}$. Como $\overrightarrow{MN} = (1, 2, 4)$, $\overrightarrow{MP} = (x - 1, y - 2, z + 3)$ segue que:
$(x - 1, y - 2, z + 3) = t(1, 2, 4)$
ou,
$x - 1 = t$
$y - 2 = 2t$
$z + 3 = 4t,$
e daí segue

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 4t, \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da reta r.

2. Mostre que as retas L_1 e L_2 com as equações paramétricas dadas por:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t. \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3 + s \\ z = -3 + 4s. \end{cases}$$

são *retas reversas*, isto é, são retas que não se interceptam e não são paralelas.

Solução:

Para verificar o paralelismo das retas, basta observar se os vetores diretores são múltiplos (paralelos). Nesse caso, vê-se que os vetores $(1, 3, -1)$ e $(2, 1, 4)$ não o são.
Falta somente verificar se tais retas se interceptam. Se L_1 e L_2 tivessem ponto em comum, existiriam valores para t e s tais que:

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2s \\ -2 + 3t &= 3 + s \\ 4 - t &= -3 + 4s \end{aligned}$$

Os valores $t = \frac{11}{5}$ e $s = \frac{8}{5}$ só satisfazem as duas primeiras equações. Não existem valores t e s que satisfaçam as três equações simultaneamente. Logo L_1 e L_2 são retas reversas, não se interceptam.

Atividades Propostas

1. Determine a equação vetorial e as equações paramétricas para a reta:

i) que passa pelo ponto (1, 0,–3) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 4, 5)$
ii) que passa pela origem e é paralela à reta

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= 4 + 3t, \end{aligned}$$

2. Sejam $A(0, 2, 2)$, $B(0, 0, 1)$ e $r : X = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$. Determine os pontos de r equidistantes de A e B.

3. Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $P(7,-2, 1)$ e $Q(3, 4, 2)$.

4. Sejam $B(1, 2, 3)$ e $C(-1, 2, 0)$. Escreva equações paramétricas da reta que contém o ponto $R(1, 1, 1)$ e é paralela à reta que contém B e C.

5. Obtenha dois pontos e dois vetores diretores da reta de equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= 4 + 2t, \end{aligned}$$

6. Quais as equações paramétricas dos eixos coordenados?

7. Sejam $A(3, 6,-7)$, $B(-5, 2, 3)$ e $C(4,-7 - 6)$.

a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.
b) Escreva equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

8. Sejam, em relação a um sistema ortogonal, $A(1, 4, 0)$, $B(2, 1,-1)$ e $C(1,2,2)$. Verifique que esses pontos são vértices de um triângulo e escreva uma equação vetorial da reta que contém a altura relativa ao vértice B.

9. Escreva equações paramétricas da reta determinada pelo ponto $(-1,-4,-2)$ e pelo ponto médio do segmento de extremidades $(1, 3, 5)$ e $(3,-3, 1)$.

3.3 Equações Simétricas da Reta

Uma reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases} \tag{3.3}$$

não é paralela a nenhum dos planos coordenados xy, xz e yz se, e somente se; o vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ também não for paralelo a nenhum deles, ou seja; se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ podemos reescrever as equações paramétricas da seguinte maneira:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

estas equações são denominadas de **equações simétricas da reta.**

Atividades Resolvidas

1. Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (2,-1, 4)$ na direção do vetor $\vec{u} = (1, 3,-2)$.

Solução:

De acordo com a atividade resolvida na pág. 44, tal reta tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - 2t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Então de acordo com a expressão (3.4), a equação simétrica para esta reta fica

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 4}{-2} \tag{3.5}$$

1. Escreva cada reta das Atividades Propostas da seção 3.2 em forma de equações simétricas.

Atividades Propostas

Planos

Escolhido um ponto fixo $A_0 \in \mathbb{R}^3$ existem infinitos planos que passam por A_0, mas um plano que contém o ponto A_0 e ao mesmo tempo é perpendicular a um vetor dado, existe somente um. Escolhido arbitrariamente um ponto P, que relação este ponto deve satisfazer para pertencer ao plano que passa por A_0 e é perpendicular a um vetor dado $\vec{n}$?

4.1 Vetor Normal de um Plano

Note que um ponto P pertence ao plano α que passa por A_0 e é perpendicular a um vetor $\vec{n}$, se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{A_0P}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares, ou seja; se

$$\overrightarrow{A_0P} \cdot \vec{n} = 0. \tag{4.1}$$

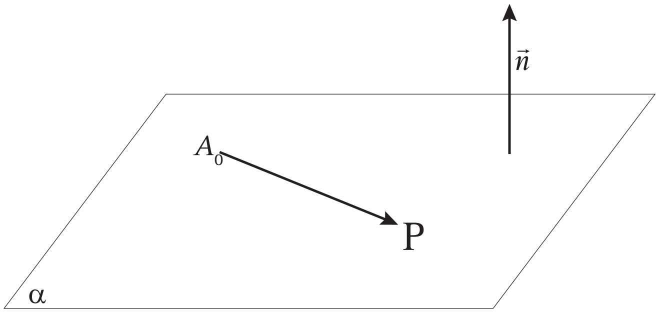


Figura 4.1

A relação (4.1) responde a questão colocada no início do capítulo, o vetor $\vec{n}$ é denominado **vetor normal** ao plano α.

4.2 Equação Normal do Plano

Conhecido um ponto $A_0(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$, vamos reescrever a equação (4.1) em termos das coordenadas de A_0, $P(x, y, z)$ e $\vec{n}$. Em outras palavras, queremos determinar relações entre as coordenadas dos pontos A_0 e P e do vetor $\vec{n}$ para que o ponto P pertença ao plano que passa por A_0 e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$.

Na seção anterior, vimos que o ponto P pertence ao plano que passa por A_0 e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{A_0P}$ e $\vec{n}$ são ortogonais.

De acordo com (4.1) isto quer dizer que:

P $\in \alpha$ se, e somente se, $\overrightarrow{A_0P} \cdot \vec{n} = 0$,

como $\overrightarrow{A_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, temos que

P $\in \alpha$ se, e somente se,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{4.2}$$

daí obtemos;

$ax + by + cz + d = 0$, onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$,

a **equação normal do plano.**

Mostramos, portanto, que em um sistema de coordenadas cartesianas "*todo plano é definido por uma equação do primeiro grau*".

Atividades Resolvidas

1. Encontrar a equação do plano que contém o ponto $P_0(3,-1, 5)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

Solução:

De acordo com (4.1) $P(x, y, z)$ pertence ao plano que contém o ponto $P_0(3, -1, 5)$ se, e somente se, $P_0P.n = 0$, temos que $P_0P = (x - 3, y + 1, z - 5)$ e $n = (2, 3, -1)$ então $P \in \beta$ se, e somente se, $2(x - 3) + 3(y + 1) - 1(z - 5) =0$, isto é,

$$2x + 3y - z + 2 = 0.$$

4.2.1 Equação de um plano determinado por três pontos

O axioma da geometria Euclidiana a seguir estabelece a relação entre pontos e planos: *Três pontos não colineares determinam um único plano.*

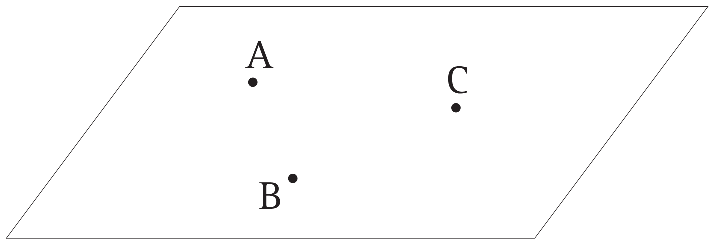


Figura 4.2

Vamos ver este axioma em termos de vetores (segmentos orientados) e de coordenadas de pontos.

Dado três pontos A, B e C não colineares, qual a condição para que um ponto P pertença ao plano determinado por A, B e C?

Observe que o plano , determinado pelos pontos A, B e C, é também o plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Um ponto P pertence a este plano se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ for perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Isto é; P pertence ao plano determinado por A, B e C se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0. \tag{4.3}$$

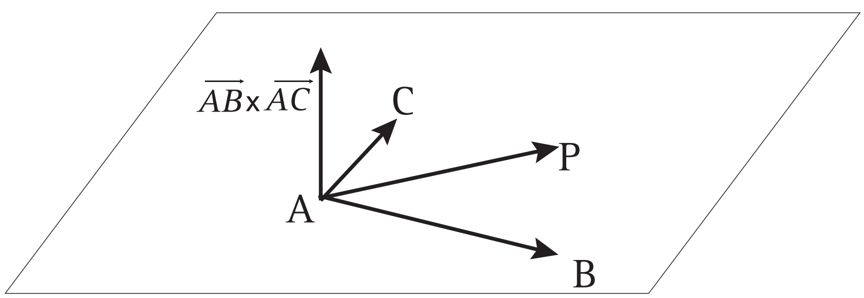


Figura 4.3

> *A relação em (4.3), é uma condição de coplanaridade de três vetores, ou seja; o produto misto entre eles deve ser 0(zero). Conhecidos os pontos A, B e C, vamos reescrever a equação (4.3) em termos das coordenadas de A, B, C e P um ponto arbitrário. Queremos determinar relações entre as coordenadas dos pontos A, B, C e P de modo que o ponto P pertença ao plano determinado por A, B e C.*

Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$ pontos conhecidos e $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário. Temos então que: $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.

E de acordo com (4.3), $P \in \alpha \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - x_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Atividades Resolvidas

1. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 2)$ e $C = (1, 1, 1)$.

Solução:

Os pontos $P = (x, y, z)$ que comporão o plano procurado devem necessariamente satisfazer a equação (4.3). Com as coordenadas dos pontos A, B, C e P, segue que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, -1, -2) \\ \overrightarrow{AP} &= (x - 1,\ y - 2,\ z - 3) \end{aligned}$$

Substituindo tais informações na equação (4.4), temos

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

De onde resulta a equação do plano $x - 2y + z = 0$.

Atividades Propostas

1. Supondo $abc \neq 0$, escreva a equação do plano que corta os eixos coordenados nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ respectivamente.

2. Obtenha uma equação para o plano que contém o ponto P e é perpendicular ao segmento de reta AB nos seguintes casos:

a) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (2,-1, 2)$
b) $P = (1, 1,-1)$, $A = (3, 5, 2)$, $B = (7, 1, 12)$
c) $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$

3. Sejam $A = (3, 1, 3)$, $B = (5, 5, 5)$, $C = (5, 1,-2)$ e $D = (8, 3,-6)$. Mostre que as retas AB e CD são concorrentes e ache uma equação para o plano que as contém.

4. Ache as coordenadas do ponto do plano $2x + y - 2z = 12$ que está mais próximo da origem.

5. Determine o ponto de interseção da reta $x = 3 - t$; $y = 2 + t$; $z = 5t$ e do plano $x - y + 2z = 9$.

6. Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

a) $x + 4y - 3z = 1$, $-3x + 6y + 7z = 0$
b) $x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$
c) $x + 2y + 2z = 1$, $2x - y + 2z = 1$
d) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (2,-1, 2)$
e) $x = 4y - 2z$, $8y = 1 + 2x + 4z$

7. Determine as equações paramétricas da reta obtida pela interseção dos planos.

a) $x - 2y + z = 1$, $2x + y + z = 1$
b) $2x + 5z + 3 = 0$, $x - 3y + z + 2 = 0$

8. Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1 = x_1, y_1, z_1$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

9. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

10. Qual a distância do ponto $P = (3, 7, 0)$ ao plano $x + 2y - z = 5$?

11. Qual ponto é a projeção ortogonal do ponto $P = (3, 7, 0)$ no plano $x + 2y - z = 5$?

12. Qual é o simétrico do ponto $P = (3,7,0)$ em relação ao plano $x + 2y - z = 5$?

4.3 Equações Paramétricas do Plano

Seja π um plano que passa por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e paralelo a dois vetores não colineares $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a este plano se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ puder ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Isto é; P pertence ao plano π se, e somente se, existirem escalares $p, q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = m\vec{u} + n\vec{v} \tag{4.6}$$

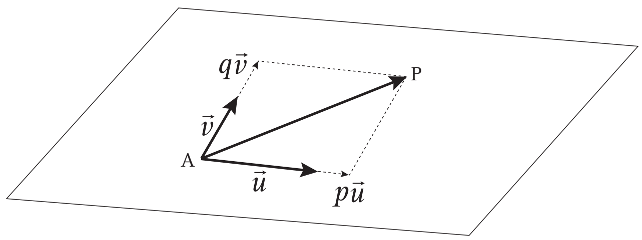


Figura 4.4

Em termos das coordenadas de A, P, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que:

$P \in \pi$, existem $p, q \in \mathbb{R}$ tal que

$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = p(a_1, b_1, c_1) + q(a_2, b_2, c_2)$,

e daí,

$$\begin{cases} x = x_1 + pa_1 + qa_2 \\ y = y_1 + pb1 + qb_2 \\ z = z_1 + pc_1 + qc_2. \end{cases}$$

Que são as **equações paramétricas do plano**.

Atividades Resolvidas

1. Determine as equações paramétricas do plano cuja equação é $x - 2y + z = 0$.

Solução:

Tal plano é o mesmo da última Atividade Resolvida, e nesse plano estão contidos os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 2)$ e $C = (1, 1, 1)$. Logo, podemos dizer que $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$, ou seja,

$$(x - 1, y - 2, z - 3) = p(-1,-1,-1) + q(0,-1,-2)$$

$$\begin{cases} x = 1 - p \\ y = 2 - p - q \\ z = 3 - p - 2q \end{cases}$$

Atividades Propostas

1. Determine uma equação paramétrica de cada plano a seguir:

a) $x + 4y - 3z = 1$
b) $x + y + z = 1$
c) $x + 2y + 2z = 1$

2. Determine se cada ponto a seguir pertence ao plano dado por:

$$\begin{cases} x = 1 + q \\ y = p + 2q \\ z = 2p + 1 \end{cases}$$

a) $P(1, 1, 1)$
b) $Q(0, 1, 7)$
c) $R(3, 6, 5)$

Curvas Cônicas

A denominação **cônicas** é motivada pelo fato de que a elipse, a hipérbole e a parábola bem como suas formas degeneradas, um ponto, um par de retas concorrentes e um par de retas paralelas; podem ser obtidas como a interseção de planos com cones.

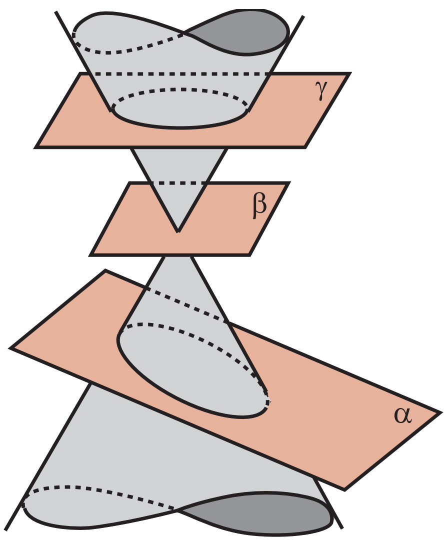


Figura 5.1

Definição 5.1. *Uma* **curva cônica** *é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a equação geral do segundo grau*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{5.1}$$

Nas próximas três seções, estudaremos as equações canônicas destas curvas com a finalidade de propiciar ao leitor o conhecimento das suas principais propriedades geométricas. Retornaremos ao estudo da equação geral (5.1) na seção 4.

5.1 Elipse

Podemos obter esta curva interceptando o cone circular reto por um plano não paralelo à sua geratriz.

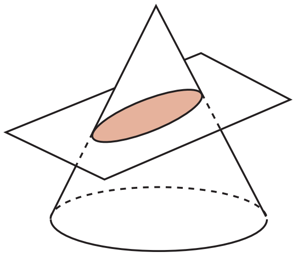


Figura 5.2

Definição 5.2. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos P(x, y) tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, situados no mesmo plano de P e denominados focos, é constante e superior à distância entre F_1 e F_2.*

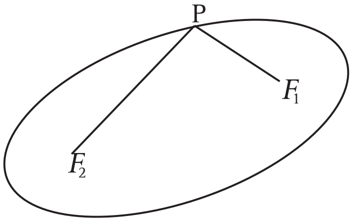


Figura 5.3

O ponto médio do segmento de reta F_1F_2 é denominado *centro da elipse.*

Observe que a soma das distâncias entre o ponto P e os dois pontos F_1 e F_2 é sempre maior do que a distância entre eles, ver desigualdade triangular; se esta soma for igual à distância entre F_1 e F_2, o lugar geométrico descrito é o segmento de reta que une os dois pontos.

5.1.1 Equação canônica da Elipse

Para obtermos a equação canônica da elipse colocaremos os focos numa posição muito particular num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, ou seja; sobre um dos eixos coordenados e equidistantes da origem.

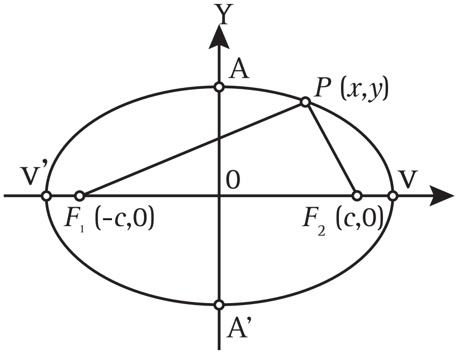


Figura .4

Nestas condições, as coordenadas dos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, onde $c > 0$, é um número real; assim a distância entre F_1 e F_2 é $||\overrightarrow{F_1F_2}|| = 2c$.

Escolhendo agora $a \in \mathbb{R}^2$ com $a > c$, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer, temos que a equação

$$||\overrightarrow{P_1F}|| + ||\overrightarrow{PF_2}|| = 2a, \tag{5.2}$$

é a equação de uma elipse cujo *centro* é a origem dos sistemas de coordenadas.

Reescrevendo a equação (5.2) em termos das coordenadas dos focos $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ e do ponto P, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

elevando ambos os membros ao quadrado,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2,$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$, definindo agora $b^2 = a^2 - c^2$, temos $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, dividindo esta equação por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.3}$$

a *equação canônica da elipse* também denominada *equação reduzida da elipse*.

A *excentricidade* da elipse é definida como o número $e = \frac{c}{a}$. Como na elipse $a > c$ a sua excentricidade é um número entre zero e um, isto é; $0 \leq e < 1$.

A excentricidade nos fornece a forma da elipse, observe que quanto menor for a excentricidade, a elípse estará mais "próxima" de um círculo. Quando c = 0, teremos a = b e a equação (5.3) torna-se a equação de uma circunferência. Dizemos então que um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

Atividades Resolvidas

1. Determine a equação da elipse com focos (±4, 0) e vértices (±5, 0).

Solução:

De acordo com as informações do problema e observando a figura 5.4, tem-se c = 4 e a = 5, donde conclui-se que $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$, daí a equação procurada será

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. Determinar os pontos da elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

de maneira que a distância ao foco que se acha sobre o eixo positivo dos x seja 14.

Solução:

De acordo com a equação da elipse acima, tem-se $a^2 = 100$ e $b^2 = 36$, de onde resulta $c = 8$, ou seja, as coordenadas dos focos são $F_1 = (-8, 0)$ e $F_2 = (8, 0)$. A partir da equação da elipse, pode-se escrever

$$y^2 = 36 - 36\frac{x^2}{100}$$

Agora, procuramos os pontos $P = (x, y)$ da elipse que satisfaçam $d(P, F_2) = 14$, isto é,

$$\sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 14$$

e substituindo uma equação na outra obter-se-á

$$x^2 - 25x - 150 = 0$$

e segue que, $x' = -5$ ou $x'' = 30$. Essa última representa um ponto que não pertence à elipse. Já $x = -5 \Rightarrow y = \pm 3\sqrt{3}$ e os pontos procurados serão $(-5, 3\sqrt{3})$ e $(-5, -3\sqrt{3})$.

Atividades Propostas

1. Em cada um dos itens abaixo, determinar a equação de uma elipse cujos focos se encontram sobre o eixo das abscissas, dispostos simetricamente em relação à origem das coordenadas:

a) seus semi-eixos são 5 e 2.
b) seu eixo menor é 24 e a distância focal $2c = 10$.
c) seu menor eixo é 6 e a distância entre as diretrizes 13.

2. Calcular a área do quadrilátero em que dois vértices coincidam com os focos da elipse

$$x^2 + 5y^2 = 20,$$

e os outros dois com as extremidades do pequeno eixo.

3. Determinar a excentricidade de uma elipse, se dos focos se torna visível o seu eixo menor sob um ângulo de 60°.

4. Determinar a posição da reta em relação à elipse (se ela corta, é tangente ou externa), faça um esboço:

$$2x - y - 3 = 0, \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

5. Um ponto $P(x, y)$ se move de modo que o produto dos coeficientes angulares das duas retas que ligam P aos pontos $(-2, 1)$ e $(6, 4)$ dá sempre 4. Prove que o ponto P descreve uma elipse e localize o centro.

6. Prove que, dados $a > 0$ e $b > 0$, quando t varia de 0 a 2π o ponto $P = (a\cos(t), b\,\text{sen}(t))$ descreve uma elipse.

7. Achar a equação de um círculo em cada um dos itens abaixo:

a) os pontos $A(3, 2)$ e $B(-1, 6)$ são as extremidades de um de seus diâmetros.
b) o centro do círculo coincide com o ponto $C(1,-1)$ e é tangente à reta $5x - 12y + 9 = 0$.
c) o círculo passa pelos três pontos $A(1, 1)$, $B(1,-1)$ e $C(2, 0)$.

8. Achar a equação de um círculo que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(-1, 3)$ e seu centro se encontra sobre a reta $x - 2y - 2 = 0$.

9. Achar a equação de um círculo cujo centro é o ponto $C(3, 1)$ e que determina sobre a reta $2x - 5y + 18 = 0$ uma corda de comprimento 6.

10. Achar as equações dos círculos que passam pelo ponto $A(1, 0)$ e que são tangentes às duas retas

$$2x + y + 2 = 0, \text{ e } 2x + y - 18 = 0.$$

5.2 Hipérbole

A hipérbole é uma curva que pode ser obtida interceptando o cone circular reto por um plano paralelo ao seu eixo.

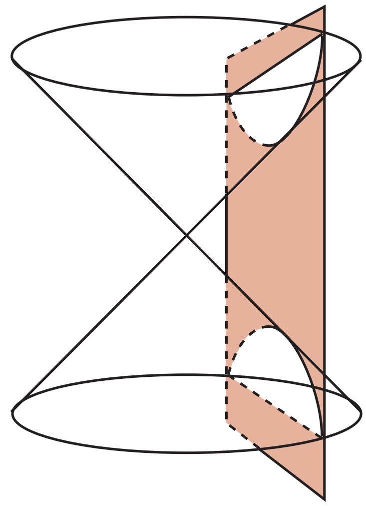


Figura 5.5

Definição 5.3. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, situados no mesmo plano de P e denominados focos, é constante e inferior à distância entre F_1 e F_2.*

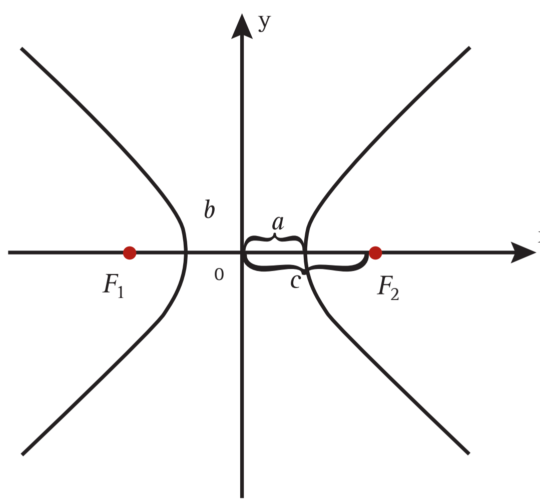


Figura 5.6

O ponto médio do segmento de reta F_1F_2 é denominado *centro da hipérbole*.
Observe que a diferença das distâncias entre um ponto $P(x,y)$ e os pontos F_1e F_2 é sempre menor do que a distância entre eles.

5.2.1 Equação canônica da Hipérbole

Para obtermos a equação canônica da hipérbole, repitiremos o procedimento que fizemos para a elipse, colocaremos os focos numa posição muito particular num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, ou seja; sobre um dos eixos coordenados e equidistantes da origem.

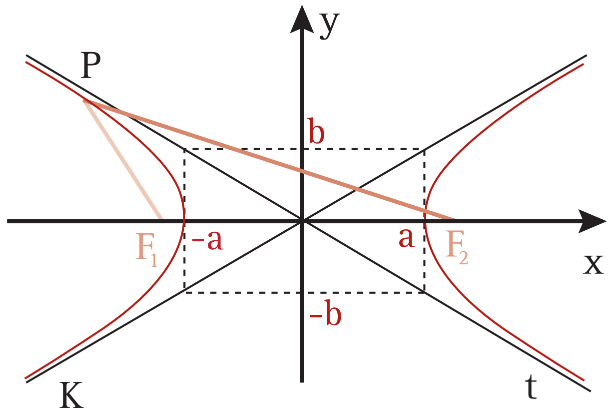


Figura 5.7

Nessas condições, as coordenadas dos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, onde $c > 0$, é um número real; assim a distância entre F_1 e F_2 é $||\overrightarrow{F_1F_2}|| = 2c$.

Escolhendo agora $a \in \mathbb{R}^2$ com $a < c$, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer, temos que a equação

$$\left|\, ||\overrightarrow{PF_1}|| - ||\overrightarrow{PF_2}|| \,\right| = 2a, \tag{5.4}$$

é a equação de uma hipérbole cujo *centro* é a origem dos sistemas de coordenadas.

Reescrevendo a equação (5.4) em termos das coordenadas dos focos $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ e do ponto P, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

elevando ambos os membros ao quadrado,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

e daí obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $c > a$, $c^2 - a^2 > 0$, definindo agora $b^2 = c^2 - a^2$, temos $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, dividido esta equação por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a *equação canônica da hipérbole* também denominada *equação reduzida da hipérbole*.

Como na elipse o número $e = c/a$ é também definido como a excentricidade da hipérbole. Mas, nesse caso, $a < c$ e portanto a excenctricidade da hipérbole é um número maior do que um.

As retas de equações

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

são as assíntotas da hipérbole.

Atividades Resolvidas

1. Encontre os focos e as assíntotas da hipérbole $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Solução:

Dividindo toda a equação por 144, tem-se

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

o que resulta por sua vez em $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, e, usando, $b^2 = c^2 - a^2$ vem $c = 5$. Logo, os focos têm coordenadas $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$. Já que a hipérbole está centrada na origem, com os focos sobre o eixo x, as assíntotas são dadas por:

$$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{3}{4} x.$$

2. Encontre os focos e a equação da hipérbole com vértices $(0, \pm 1)$ e assíntota $y = 2x$.

Solução:

Já que os vértices estão sobre o eixo y e simétricos em relação à origem, isso significa que a hipérbole está centrada na origem, logo, as assíntotas são dadas por $y = \pm \frac{b}{a} x$, ou seja, $b = 2$ e $a = 1$, daí a equação da hipérbole pode ser escrita como

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1.$$

Como $b = 2$ e $a = 1$, da expressão $b^2 = c^2 - a^2$ resulta $c = \sqrt{5}$. Daí os focos têm coordenadas $F_1 = (0, \sqrt{5})$ e $F_2 = (0, -\sqrt{5})$.

Atividades Propostas

1. Em cada um dos itens abaixo, determinar a equação de uma hipérbole cujos focos se encontram sobre o eixo das ordenadas, dispostos simetricamente em relação à origem das coordenadas:

a) seus semi-eixos são $a = 6$ e $b = 18$.
b) a distância focal $2c = 10$ e a excentricidade $e = 5/3$.
c) a distância focal 48 e as equações das assíntotas

$$y = \pm\frac{4}{3}x$$

2. Calcular a área do triângulo formado pelas assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ e a reta } 9x + 2y - 24 = 0.$$

3. A excentricidade de uma hipérbole é $e = 3$, a distância do ponto M da hipérbole à uma diretriz é 4. Calcular a distância do ponto M ao foco correspondente a essa diretriz.

4. Demonstrar que o produto das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

às suas assíntotas é constante e igual à $a^2b^2/(a^2 + b^2)$.

5. Achar a equação de uma hipérbole, sabendo-se que a distância de seus vértices é 24 e os focos coincidem com os pontos $F_1(-10, 2)$ e $F_2(16, 2)$.

6. Achar a equação de uma hipérbole cujos focos coincidam com os vértices da elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

e cujas diretrizes passem pelos focos dessa elipse.

7. Achar a equação de uma hipérbole, sabendo que o centro é (0, 0), um dos vértices é (3, 0) e a equação de uma das assíntotas é $2x - 3y = 0$.

8. Quais são as coordenadas dos focos da hipérbole $xy = 1$?

5.3 Parábola

A parábola é uma curva que pode ser obtida interceptando o cone circular reto por um plano paralelo à sua geratriz.

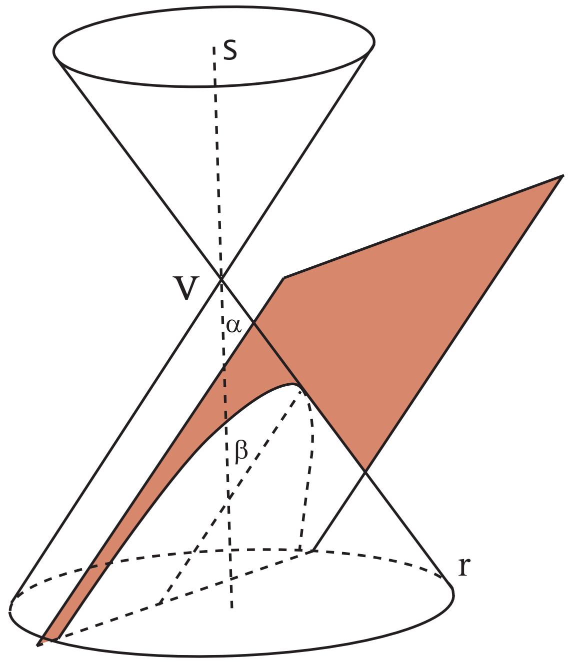


Figura 5.8

Definição 5.4. *Dados uma reta e um ponto fora desta reta, parábola é o lugar geométrico dos pontos P(x, y) do plano, equidistantes da reta e do ponto dados.*

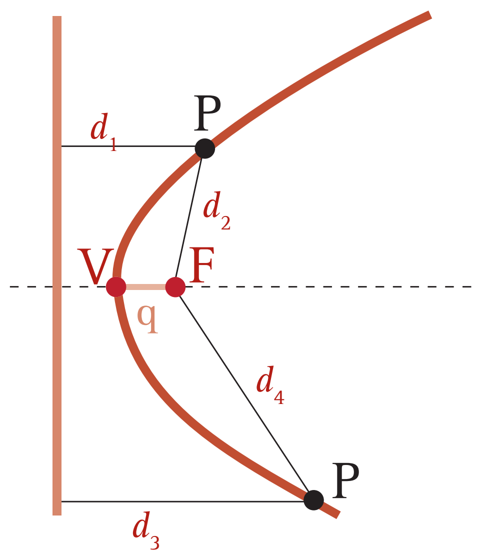


Figura 5.9

O ponto fixo F é denominado *foco da parábola* e a reta, diretriz da parábola.

A reta perpendicular à diretriz e passando pelo foco é denominada *eixo da parábola*, e o ponto médio do segmento desta reta entre o foco e a diretriz é o *vértice da parábola*.

5.3.1 Equação canônica da Parábola

Para obtermos a equação canônica da parábola, vamos proceder como na elipse e hipérbole, colocaremos o foco e a diretriz numa posição muito particular num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, ou seja; o foco sobre um dos eixos coordenados e a diretriz perpendicular a este eixo e equidistantes da origem.

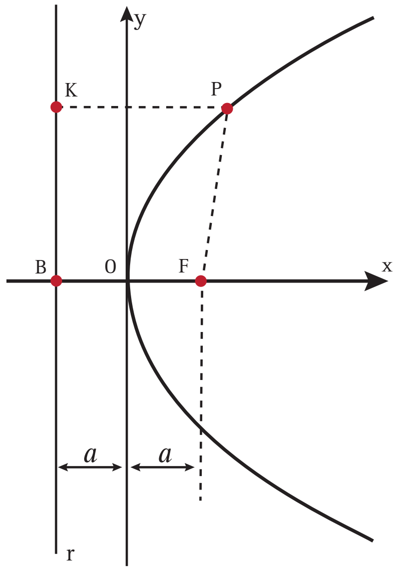


Figura 5.10

Na figura acima, temos $F(a, 0)$ e $B(-a, 0)$ o ponto de interseção da diretriz com o eixo x, por definição, um ponto pertence a parábola, se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, r), \tag{5.5}$$

onde $y = -a$ é a diretriz, ou em termos de coordenadas;

$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x + a|,$

elevando ambos os membros ao quadrado,

$(x - a)^2 + y^2 = |x + a|^2,$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$

e daí,

$y^2 = 4ax,$

uma das *equações canônicas da parábola.*

Observe que o eixo de simetria da parábola é o eixo onde se encontra o foco.

Nesse caso, a origem das coordenadas é o vértice da parábola.

Atividades Resolvidas

1. Determine a equação da parábola com vértice (1, 0) e reta diretriz $x = -5$.

Solução:

Se o vértice da parábola está sobre o eixo x e a reta diretriz é paralela ao eixo y, então o foco estará sobre o eixo x. A distância do vértice à diretriz é igual a 6, logo $a = 6$ e as coordenadas do foco são (7, 0). Sendo assim, para determinar a equação da parábola, usamos a expressão (5.5) que leva a

$$\sqrt{(x-7)^2 + y^2} = x + 5$$

que por sua vez dá origem a

$$y^2 = 24x - 24$$

que é a equação procurada.

2. Determinar os pontos de interseção da reta $x + y - 3 = 0$ e da parábola $x^2 = 4y$.

Solução:

Da equação da reta, obtém-se $y = 3 - x$ que substituindo na equação da parábola resulta em $x^2 + 4x - 12 = 0$. As soluções dessa equação são $x' = 2$ e $x'' = -6$. Substituindo tais valores na nova equação da reta chega-se às coordenadas (2, 1) e (–6, 9) que são os pontos que pertencem à reta e à parábola simultaneamente.

Atividades Propostas

1. Achar a equação de uma parábola cujo vértice coincida com a origem das coordenadas, sabendo-se que:

a) a parábola se encontra no semi plano inferior, disposta simetricamente em relação ao eixo $0Y$, sendo seu parâmetro $a = 3/2$.
b) a parábola se encontra disposta simetricamente em relação ao eixo $0X$, e passa pelo ponto $B(-1, 3)$.
c) a parábola se encontra disposta simetricamente em relação ao eixo 0Y, e passa pelo ponto $C(1, 1)$.

2. Calcular o raio vetor de um ponto M de ordenada 6 da parábola $y^2 = 12x$.

3. Determinar os pontos de interseção da hipérbole

$$\frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{5} = 1$$

e da parábola $y^2 = 3x$.

4. Um raio luminoso, partindo do foco da parábola $y^2 = 12x$, faz um ângulo agudo com o eixo $0X$. Sabe-se que $tan(\alpha) = 3/4$, ao atingir a parábola, o raio é refletido, formar a equação da reta que dá a trajetória do raio refletido.

5.4 Uma equação que unifica as cônicas

Seja e a excentricidade da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

As retas

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{e},$$

são denominadas de *diretrizes* da elipse relativas aos focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$, respectivamente.

Atividades Resolvidas

Mostre que P pertence à elipse se, e somente se,

$$\frac{d(P,F)}{d(P,D)} = e,$$

onde F é um de seus focos, e D a diretriz correspondente.

Solução

$P(x, y)$ pertence a elipse se, e somente se, suas coordenadas satisfazem,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

como $d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, considerando o foco $F(c, 0)$,

e da equação imediatamente acima

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

P pertence à elipse, se e somente se,

$$d(P,F)= \sqrt{(x-ae)^2+ b^2 -\frac{b^2}{a^2}x^2}, \text{ pois } e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae,$$

$$d(P,F)= \sqrt{x^2- 2aex + a^2e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2},$$

$$d(P,F)= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2aex + a^2e^2 + b^2},$$

$$d(P,F)= \sqrt{e^2x^2 - 2aex + a^2e^2 + b^2},\ e^2=\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

$$d(P,F)= \sqrt{e^2x^2 - 2aex + a^2e^2 + a^2 - a^2e^2},$$

E daí,

$$d(P,F)= \sqrt{e^2x^2 - 2aex + a^2} = \sqrt{(ex-a)^2},$$

isto é,

$$d(P,F)= |ex - a|,$$

ou melhor,

$$d(P,D)= \left|x-\frac{a}{e}\right|.$$

Portanto $P(x, y)$ pertence à elipse, se, e somente se,

$$\frac{d(P,F)}{d(P,D)} = e,$$

5.4.1 Unificação das cônicas

As propriedades da elipse e da hipérbole vistas nos dois resultados anteriores, junto com a definição da parábola, servem para definir estas curvas:

*Dados uma reta e um ponto não pertencente à reta, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão das distâncias ao ponto fixo (*foco*), e à reta fixa (*diretriz*), é um valor constante*

$$\frac{d(P,F)}{d(P,D)} = e, \qquad \mathrm{e} = constante, \tag{5.6}$$

é:

a) *uma elipse se e < 1,*
b) *uma hipérbole se e > 1,*
c) *uma parábola se e = 1.*

Atividades Resolvidas

1. A órbita da Terra é uma elipse, com o sol em um dos focos. Sabendo-se que o semi-eixo maior da elipse mede 93 000 000 milhas e que a excentricidade vale 1/62, aproximadamente, determine a maior e a menor distância da Terra em relação ao Sol.

Solução:

Se usamos a expressão $e = \frac{c}{a}$, então

$$\frac{1}{62} = \frac{c}{93\ 000\ 000}$$

e daí $c = 1\ 500\ 000$.
A maior distância é $a + c = 94\ 500\ 000$ milhas e a menor, $a - c = 91\ 500\ 000$ milhas.

Atividades Propostas

1. Seja e a excentricidade da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = -\frac{a}{e} \qquad x = \frac{a}{e}$$

suas diretrizes relativas aos focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ respectivamente. Mostre que P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$\frac{d(P, F)}{d(P, D)} = e,$$

onde F é um de seus focos, e D a diretriz correspondente.

5.5 Simplificação das curvas do 2º Grau

Até o presente momento, todas as equações das cônicas foram obtidas tomando-se o centro das mesmas coincidente com a origem do sistema de eixos coordenados. Além disso, focos e vértices sempre estavam localizados sobre os eixos coordenados. Essas particularidades nem sempre ocorrem. Essa seção tem como objetivo simplificar as equações das cônicas que não estão posicionadas na forma peculiar utilizada até então.

5.5.1 Translação de eixos

Estudaremos inicialmente os casos em que as cônicas sofreram uma translação em relação à origem $O = (0, 0)$. Para tanto efetuaremos uma translação de eixos, pois esse processo simplificará a equação. Sejam OX e OY os eixos primitivos e $O'X'$ e $O'Y'$ os novos eixos e a origem desses últimos (h, k), em relação aos primitivos.

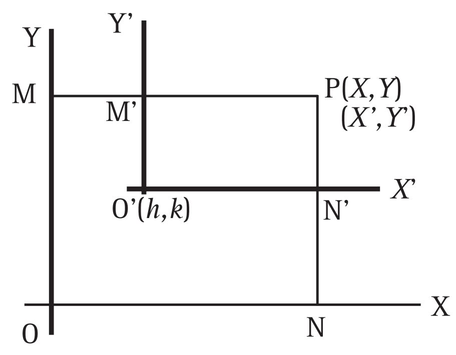


Figura 5.11

Nossos esforços se concentrarão na direção de escrever as coordenadas do ponto $P(x', y')$ na forma $P(x, y)$. Sendo que (x', y') referem-se ao sistema de eixos OX' × OY'. Ao observar a figura 5.11, tem-se

$$x = MP = MM' + M'P = h + x'$$

e

$$y = NP = NN' + N'P = k + y'.$$

Tais conclusões podem ser sintetizadas pelas fórmulas de translação a seguir:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \qquad (5.8)$$

5.5.2 Rotação de eixos

Sejam dois eixos OX e OY primitivos e OX' e OY', os novos eixos obtidos pela rotação de um ângulo θ dos primeiros.

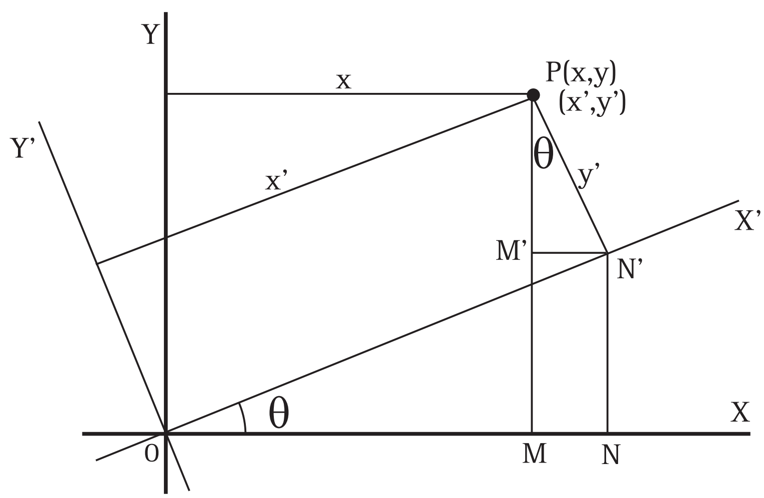


Figura 5.12

Assim como na seção anterior, tentaremos escrever as coordenadas x e y do ponto P em função de θ, x' e y'.

$$x = OM = ON - MN$$
$$x = x' \cos \theta \ - y' \operatorname{sen} \theta$$

e

$$y = MP = MM' + M'P = NN' + M'P$$
$$y = x' \operatorname{sen} \theta \ - y' \cos \theta \ .$$

Logo, as fórmulas de rotação de eixos, por um ângulo são

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sen\theta \\ y = x'sen\theta + y'cos\theta. \end{cases} \tag{5.9}$$

Atividades Resolvidas

1. Aplique uma translação de eixos para reduzir a equação $2x^2+3y^2-4x+12y-20 = 0$ à sua forma mais simples.

Solução:

Substituindo na equação acima as expressões

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

vem

$$2(x' + h)^2 + 3(y' + k)^2 - 4(x' + h) + 12(y' + k) - 20 = 0$$

que é equivalente a

$$2x'^2 + 4x'(h - 1) + 3y'^2 + 6y'(k + 2) = 20 - 2h^2 + 3k^2 + 4h + 12k$$

fazendo $h = 1$ e $k = -2$ a equação acima torna-se

$$\frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{10/3} = 1$$

que é equação de uma elipse com centro no ponto $P = (h, k) = (1,-2)$.

Solução Alternativa:

Completando os quadrados na equação $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$, obtém-se:

$$2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y - 20 = 0$$

$$2(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 = 20 + 2 - 12$$

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{10/3} = 1$$

Logo, usando

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

as coordenadas do centro da elipse são $(h, k) = (1,-2)$.

2. Determine o ângulo, segundo o qual os eixos devem girar para eliminar o termo xy na equação $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

Solução:

Utilizando as equações em (5.9) na equação da cônica acima, tem-se

$$7(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 - 6\sqrt{3}(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + \\ +13(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 = 16$$

que fornecerá

$$(7\cos^2\theta - 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 13\operatorname{sen}^2\theta)x'^2 + \\ + [12\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)]x'y' + \\ +(7\operatorname{sen}^2\theta + 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 13\cos^2\theta)y'^2 = 16$$

Para eliminar o termo misto $x'y'$ da equação, é necessário que

$$12\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

ou apenas

$$6\operatorname{sen} 2\theta - 6\sqrt{3}(\cos 2\theta) = 0.$$

Então $tg\, 2\theta = \sqrt{3}$, daí $2\theta = 60°$ e finalmente $\theta = 30°$.
Fazendo $\theta = 30°$ a equação fica $x'^2 + 4y'^2 = 4$, que é a equação de uma elipse.

1. *Para a equação geral do 2° grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma rotação de um ângulo que elimina o termo misto (xy) pode ser calculado pela fórmula*

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

2. *Também pode-se mostrar que para a mesma equação geral acima valem as seguintes propriedades:*

· $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ *a curva é uma* **elipse**,
· $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ *a curva é uma* **parábola** *e*
· $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ *a curva é uma* **hipérbole**.

Atividades Propostas

1. Por intermédio de uma translação de eixos, empregando

$$x = x' + h \text{ e } y = y' + k,$$

reduzir cada uma das equações dadas à forma típica mais simples e especifique a cônica representada.

a) $y^2 - 6y - 4x + 5 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$

2. Em cada item, utilize o discriminante $B^2 - 4AC$ para especificar a cônica representada:

a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$
b) $41x^2 - 84xy + 76y^2 = 168$
c) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$
d) $xy + x - 2y + 3 = 0$
e) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 4$

3. Mediante uma rotação dos eixos coordenados, simplifique a equação $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$. A seguir identifique a cônica.

4. Faça com os eixos coordenados uma rotação correspondente ao ângulo $tg^{-1}(\frac{4}{3})$ e simplifique a equação $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$.

5. Em cada item a seguir, determine a equação da cônica que passa pelos pontos dados:

a) (5, 2), (1,–2), (–1, 1), (2, 5) e (–1,–2)
b) (1, 1), (–1, 2), (0,–2), (–2,–1) e (3,–3)
c) (4, 1), (2, 2), (3,–2), (4,–1) e (1,–3)
d) (1, 6), (–3,–2), (–5, 0), (3, 4) e (0, 10)

6. Simplificar cada uma das seguintes equações pela transformação adequada dos eixos:

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12x + 36y + 44 = 0$
b) $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
c) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$
d) $2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C., WAGNER, E.,MORGADO, A.C., *A Matemática do Ensino Médio - volume 3*, SBM, Rio de Janeiro (2001).

[2] BOLDRINI, J.L., COSTA, S.I., FIGUEIREDO, V.L. E WETZLER, H.G., *Álgebra Linear*, HARBRA, São Paulo (1980).

[3] CAMARGO, I. E BOULOS, P., *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*, Pearson Education do Brasil LTDA, São Paulo, (2006).

[4] EFIMOV, N., *Elementos de Geometria Analítica*, Livraria Cultura Brasileira Editôra, São Paulo, (1972).

[5] KLETENIK, N., *Problemas de Geometria Analítica*, Livraria Cultura Brasileira Editora, São Paulo, (1972).

[6] LANG, S., *Ágebra Linear*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, (1971).

[7] REIS, G.L. E SILVA, V.V., *Geometria Analítica*, Livros Técnicos e científicos S.A., São Paulo, (1989).

[8] SANTOS, N.M., *Vetores e Matrizes*, Livros Técnicos e Científicos S.A., Rio de Janeiro, (1976).

[9] STEINBRUCH, A. E WINTERLE, P., *Geometria Analítica*, McGraw-Hill, São Paulo, (1987).

[10] VALLADARES, R.J., *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Editora Campus LTDA, Rio de Janeiro (1982).

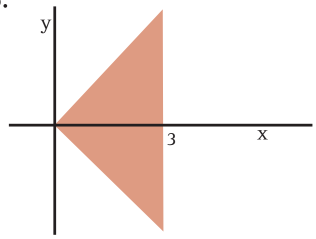
Índice Remissivo

Respostas das Atividades Propostas

Capítulo 1. Vetores e Combinações Lineares

$\rightarrow$ 1.1 - Coordenadas Cartesianas

1. $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$;
2. Seguem da Definição de Equipolência;
3. Utilize o resultado provado na Atividade Resolvida acima. No caso de vetores não-colineares utilize congruência de triângulos.
4. $(x,-y)$ e $(-x, y)$ respectivamente;
5. retas $x = 2$ e $x = 3$;
6.



7. $X'(2a - x, 2b - y)$ e $X'(-x,-y)$.

$\rightarrow$ 1.2 - Vetores

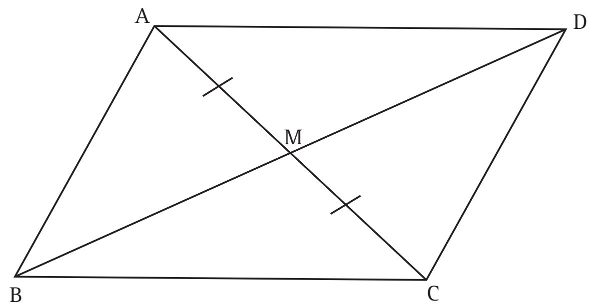
1. $(-1, 2, 3)$
2. (Dica) Seja $\vec{v} = (a, b, c)$, verifique que $cos\alpha = \dfrac{a}{\|\vec{v}\|}$.
3. Escreva $v = (x, y)$ e calcule o módulo de $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

$\rightarrow$ 1.3 - Operações Lineares

1. Estar bem definida significa que dados dois vetores, sempre é possível encontrar a soma dos mesmos e que só existe um vetor soma para esses dois vetores em questão.
2. Utilizar a definição de soma de vetores bem como estratégias parecidas com as utilizadas nas Atividades Resolvidas em (1.3.1);
3. Utilizar a definição de produto por escalar bem como estratégias parecidas com as utilizadas nas Atividades Resolvidas em (1.3.2);
4. *i)* Faça $0 = \lambda - \lambda$ e utilize as propriedades da adição de vetores, da multiplicação por escalar e a existência do simétrico de um vetor;
   ii) Faça $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v}$;
5. Trace BD e observe que os segmentos PS e QC são bases-médias dos triângulos BDA e

BDC respectivamente. Logo, tais segmentos serão ambos paralelos à base comum BD. Repita o procedimento para AC.

6. Considere o paralelogramo a seguir, onde M é ponto médio de AC. Queremos mostrar que M é ponto médio de BD.



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$$

Já que $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$.

7. $\overrightarrow{PC} = \dfrac{n^2\overrightarrow{PA} + mn\overrightarrow{PB}}{m+n}$

8. $m = \frac{3}{2}$ e $n = \frac{9}{2}$

9. Qualquer par de vetores simétricos em relação à origem (0, 0).

10. *i)* LD
    ii) LI
    iii) LI
    iv) LI

11. *i)* 0
    ii) -12
    iii) 56
    iv) 60

12. Utilize os resultados presentes nos exercícios 11 e 12.

13. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

14. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem ser ortogonais.

15. $\vec{w} = 3\vec{u} - 1\vec{v}$

16. Sim, pois são L.I../Sim

17. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 1\vec{c}$

Capítulo 2. Produtos entre Vetores

$\rightarrow$ 2.1 - Produto Escalar (Produto Interno)

1.
2. Observe que $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
3. Sim, pois $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
4. $\theta = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$
5. Use a proposição 2.1.
6. No losango todos os lados têm mesma medida, isto quer dizer que os vetores que os definem têm mesmo módulo. As diagonais podem ser escritas como somas desses vetores, a seguir escreva o produto escalar entre os vetores localizados nas diagonais e observe que ângulos suplementares têm cossenos simétricos.
7. Sim, pois o ângulo entre PQ e QR é reto.
8. $b = 0, 2, -2$
9. (Dica: Use a igualdade $||\vec{a} + \vec{b}||^2 = (\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b})$)
10. (Dica: Use a igualdade $||\vec{a} + \vec{b}||^2 = (\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b})$)

$\rightarrow$ 2.2 - Produto Vetorial (Produto Externo)

1.
2. Utilize as definições de produto interno e vetorial.
3. $(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7})$
4. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$
5. $3\sqrt{35}$
6. $m = 5$
7. Utilize as propriedades do Produto Vetorial.

$\rightarrow$ 2.3 - Produto Misto

1. 12
2. Lembre-se que três vetores coplanares são LD. Isso significa que algum dos três pode ser escrito como combinação linear dos demais. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
3. Não, pois o produto misto entre eles é -1.
4. Utilize a proposição (2.3) e escreva $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$. O resultado seguirá das propriedades do determinante.

Capítulo 3. Retas

$\rightarrow$ 3.2 - Equações Paraméricas de uma Reta

1. a) $r = (1, 0, -3) + (2, 4, 5)t$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

b) $r = (2, -1, 3)t$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$$

2. $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3. $\begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

5. 2 pontos: (1, 0, 4) e (0, 1, 6)
   2 vetores: (–1, 1, 2) e (–2,–2, 4)

6. eixo x: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; eixo y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$; eixo z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

7. a) Utilize o Produto $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$;
   b) $\begin{cases} x = 3 + \frac{7}{2}t \\ y = 6 - \frac{17}{2}t \\ z = -7 - \frac{11}{2}t \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -6 - 2t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -p - q + 1 \\ y = p \\ z = p \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -p \\ z = -q \end{cases}$

2. a) Pertence;
   b) Pertence;
   c) Pertence.

Capítulo 5. Curvas Cônicas

→ 5.1 - Elipse

1. a) $\dfrac{x^2}{29} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

   b) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

   c)
2. 16
3. $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Corta em 2 pontos.
5. Lembre-se das fórmulas para coeficiente angular de retas;C($\frac{5}{2}$; 2)
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ deve resultar em 1, quando substituimos x por $a\cos t$ e y por $b\operatorname{sen} t$.
7. a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$

   b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (\frac{21}{13})^2$

   c) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

8. $(x + \frac{2}{3})^2 + (y + \frac{4}{5})^2 = \frac{170}{9}$

9. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \frac{622}{29}$

10. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$ e $(x - 1,8)^2 + (y - 4,4)^2 = 20$

→ 5.2 - Hipérbole

1. a) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{324}$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

c) $\frac{x^2}{5184/25} - \frac{y^2}{9216/25} = 1$

4. (Dica) Utilize a fórmula para distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $ax + by + c = 0$,

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c = 0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. A seguir, manipule a equação da hipérbole em questão.

5. $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

6. $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$

7. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

8. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

→ 5.3 - Parábola

1. a) x2 = −6y
   b) y2 = −9x
   c) x2 = y
2. 9

3. $\left(\frac{1}{10}(87 + 19\sqrt{29}), \pm\sqrt{\frac{3}{10}(87 + 19\sqrt{29})}\right)$

4. $y = \pm 2$ ou $y = \pm 18$

→ 5.4 - Uma equação que unifica as Cônicas

1. (Dica) Seguir os passos descritos na primeira Atividade Resolvida da Seção 5.4.

→ 5.5 - Simplificação da curvas do 2º Grau

1. a) $y^2 = 4x$ Parábola
   b) $x^2 + y^2 = 25$ Circunferência
   c) $3x^2 - 4y^2 = 12$ Hipérbole
2. a) Hipérbole
   b) Elipse
   c) Parábola
   d) Hipérbole
   e) Retas Paralelas

3. $x^2 - 2x - 6y = 0$ Parábola
4. $x^2 - 4y = 0$
5. a) $49x^2 - 55xy + 36y^2 - 110x - 19y - 231 = 0$ Elipse
   b) $16x^2 + 46xy + 49y^2 + 16x + 23y - 150 = 0$ Elipse
   c) $17x^2 - 16xy + 54y^2 + 11x + 64y - 370 = 0$ Elipse
   d) $xy - 2x + y - 10 = 0$ Hipérbole
6. a) $2x^2 + y^2 = 2$
   b) $32x^2 - 48y^2 = 9$
   c) $x^2 + 4y^2 = 16$
   d) Não existe

Andressa Cesana

Mestre em Matemática Aplicada pela Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro - Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo. Professora Assistente do Departamento de Engenharia e Ciências Agrárias(DECE) do Centro Universitário Norte do Espírito Santo/ CEUNES/UFES e formadora do Pró-Letramento em Matemática CEFOCO/ UFES/MEC.
Publicações: co-autora do Fascículo 6, Tratamento da Informação, do Pró-Letramento em Matemática (MEC/SEB).

Joccitiel Dias da Silva

Especialista em Matemática pela PUC-Rio, Mestre em Matemática e Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática da UFRJ. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo/UFES. Áreas de interesse: Mecânica do Contínuo e Equações Diferenciais Parciais. Atuando na formação continuada de professores das redes públicas.

www.neaad.ufes.br

(27) 4009 2208